EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 1ER ORDRE ... CE QU'IL FAUT SAVOIR

Td n°1 ; BTS 1 BIO & AB ; Année scolaire 2003/2004 ; Le 6 Septembre 2003

I – FORME GÉNÉRALE :

☞ On appelle équation différentielle du 1er ordre toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = \varphi(x) \qquad (E)$$

où y est une fonction inconnue de la variable x,
a une constante réelle et φ une fonction donnée de la variable x.

II – EQUATION HOMOGÈNE :

☞ On appelle équation différentielle homogène du 1er ordre toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = 0 \qquad (E_1)$$

❈ La solution générale de (E1) est l'ensemble des fonctions définies par :

$$y = f(x) = C\, e^{-ax}$$

où C est une constante réelle.

III – UN CAS PARTICULIER :

☞ Si le second membre de (E) est constant :

$$y' + ay = b \qquad (E)$$

b est un nombre réel

❈ On se ramène à une équation homogène en écrivant :

$$y' + a\left(y - {}^{b}/_{a}\right) = 0$$

en posant $Y = y - {}^{b}/_{a}$.

❈ **La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions définies par :**

$$g(x) = C\, e^{-ax} + {}^{b}/_{a}$$

où C est une constante réelle.

en posant $Y = y - {}^{b}/_{a}$.

IV – THÉORÈME FONDAMENTAL :

☞ Soit (E) : $y' + ay = \varphi(x)$

❈ (E_1) l'équation homogène associée à (E).

❈ **SI ON CONNAÎT UNE SOLUTION PARTICULIÈRE, h, DE (E) ALORS LA SOLUTION GÉNÉRALE DE (E) EST LA SOMME DE CETTE SOLUTION ET DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DE (E_1) :**

$$g(x) = C\, e^{-ax} + h(x)$$

OÙ C EST UNE CONSTANTE RÉELLE.

V – MÉTHODE GÉNÉRALE :

☞ Soit (E) : $y' + ay = \varphi(x)$

❈ (E_1) l'équation homogène associée à (E).

La solution générale de (E1) est l'ensemble des fonctions f définies par :

$$y = f(x) = C\, e^{-ax}$$

❈ **Pour résoudre (E) :**

① On pose $y = u(x)\, e^{-ax}$ où u est une fonction inconnue de la variable x ;

② On calcule " y' " et on reporte dans (E) de façon à obtenir " u' " ;

③ Les fonctions u telles que y soit solution de (E) sont les primitives de u' ;

④ On en déduit la solution générale de (E).

$$g(x) = u(x)\, e^{-ax}$$

© ELSA Productions NANTES Septembre 2003