PROCESSUS POISSONIENS

Td n°4 ; BTS BIO 1 ; Année scolaire 2000/2001
Le 26 Mars 2001

I – DÉFINITION :

Soit T une période de temps que l'on subdivise en n intervalles d'égale amplitude Δt. On a donc :

$$T = \mathbf{n}\,\Delta t$$

☞ Si, à l'intérieur de chacun des intervalles, la probabilité qu'un évènement A se produise est constante et égale à p ;

☞ Si, de plus, on admet que l'évènement A ne peut se produire qu'une fois à l'intérieur de chaque intervalle ;

On dit que :

LA RÉALISATION DE L'ÉVÈNEMENT A EST UN PROCESSUS POISSONNIEN :

II – ETUDE D'UN EXEMPLE :

L'opératrice d'un standard téléphonique reçoit, en moyenne, 2 appels téléphonique par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.

❶ – Démontrer que le fait de recevoir un appel téléphonique peut-être considéré comme un processus poissonien.
Préciser le paramètre de cette loi de Poisson.

❷ – Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 4 minutes ?
Calculer la probabilité pour que ce nombre d'appels dépasse 10.

UNE SOLUTION :

❶ – On peut fractionner. la minute (T) en intervalles d'une seconde (Δt), alors : $n = 60$ et $\Delta t = 1$.

On admet alors que, chaque seconde, la probabilité de recevoir un appel est constante donc $p = {}^{2}/_{60} = {}^{1}/_{30}$.

On admet aussi que, chaque seconde, il ne peut se produire au plus un appel.

LE FAIT DE RECEVOIR UN APPEL EST UN PROCESSUS POISSONIEN.

Si X désigne le nombre d'appels reçus en une minute on peut considérer qu'à chaque seconde :

- ❈ *la standartiste reçoit un appel avec la probabilité ${}^{1}/_{30}$;*
- ❈ *la standartiste ne reçoit pas d'appel avec la probabilité ${}^{29}/_{30}$;*

X suit la loi binomiale B (60, ${}^{1}/_{30}$) d'espérance mathématique 2. Cette loi binomiale peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre 2.

❷ – Sur une période de 4 minutes, le partage en 240 secondes conduit à la loi binomiale B (240 , ${}^{1}/_{30}$) d'espérance mathématique 8, ce qui permet encore une approximation par la loi de Poissonde paramètre 8.

Si Y est la variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre 8, on lit dans la table que :

$p(Y\geq 10) = 1 - p(Y<9)$ soit environ 0,283 38

Nota : Si on utilise directement la loi binomiale B (240 , ${}^{1}/_{30}$) on obtient 0,281 24.

Processus Poissoniens

Td n°4 ; BTS 1 Bio & AB
Année scolaire 2003/2004
Le 17 Mars 2004

Exemple n°1 :

Etude de la production d'ampoules d'une solution injectable .

Une usine produit en grande quantité des ampoules d'une solution injectable. La probabilité pour qu'une ampoule, prise au hasard dans la production, soit défectueuse est 0,001.

① On prélève au hasard 100 ampoules dans la production d'une journée.
On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'ampoules défectueuses dans le prélèvement.

② – Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres ;
③ – Calculer son espérance et son écart-type ;

Exemple n°2 :

Etude de la fabrication de téléphones portables .

Une usine produit en grande quantité des téléphones portables.

☞ On admet que le nombre de défauts sur un téléphone portable est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson ($\mathscr{P}_1$) de paramètre $\lambda = 1$.

LOI DE POISSON $P(\lambda)$

$$p(X = k) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

Partie A :
Un téléphone portable est considéré comme défectueux s'il possède plus de 3 défauts.

① – Quelle est la probabilité pour qu'un téléphone portable soit défectueux ?

② On admet que la probabilité pour qu'un téléphone portable soit défectueux est $p = 0{,}02$.

On prélève dans la fabrication journalière un échantillon de 100 téléphones portables.

Partie B :
Soit Y la variable aléatoire, qui à cet échantillon de 100 unités, associe le nombre de téléphones portables défectueux dans cet échantillon.

① – Quelle est la loi de probabilité de Y ;

② – Etablir la loi de probabilité de Y (on se bornera à calculer uniquement $p(Y = k)$ pour $k \ \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 \}$;

③ – ❋ a) Justifier l'approximation de la loi de probabilité de Y par une loi de Poisson ($\mathscr{P}_2$) de paramètre $\lambda = 2$.;
❋ b) En utilisant cette approximation , déterminer la probabilité pour qu'il n'y ait pas plus de 4 boitiers défectueux dans l'échantillon ;

– Tracer la courbe représentative de la loi de probabilité et de la fonction de répartition de Y ;

Si une variable aléatoire X suit la loi Binomiale $B(n, p)$
où $n \geq 30$ $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$,
Alors la loi de Poisson $P(\lambda)$ de paramètre $\lambda = np$ est une approximation de X.