APPROXIMATION D'UNE LOI PAR UNE AUTRE LOI

Td n°5 ; BTS BIO & AB 1 ;
Année scolaire 2003/2004
Le Vendredi 19 Mars 2004

$\mathscr{E}$: n tirages sans remise

Loi Hypergéométrique ;

$$p(X=k) = \frac{C_a^k\, C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

Si a+b=N , N grand et $n < \frac{N}{10}$; $p = \frac{a}{N}$

Approx imation Loi Binomiale $\mathscr{B}$ (n , p) ;

$\mathscr{E}$: n tirages avec remise

Loi Binomiale $\mathscr{B}$ (n , p) ;

$$p(X=k) = C_n^k\, p^k q^{n-k} \text{ avec } p=1-q$$

☞ **LOI BINOMIALE :**

$E(X) = np \quad V(X) = npq \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$

Si $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$, $np \leq 10$

approx imation par $\mathscr{P}(\lambda)$ $\lambda = np$

Loi de Poisson $\mathscr{P}$ (λ) ;

$$p(X=k) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} \; ; \lambda \geq 0$$

☞ **LOI DE POISSON :**

$E(X) = \lambda \quad V(X) = \lambda \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}$

Si $n \geq 30$ $npq \geq 10$

approx imation par $\mathscr{N}$ $(np, \sqrt{npq})$

Si $\lambda \geq 30$ approx imation par $\mathscr{N}$ $(\lambda , \sqrt{\lambda})$

Loi Normale $\mathscr{N}$ (m , σ) ;

de densité de probabilité

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)}$$

☞ **LOI NORMALE :**

$E(X) = m \quad V(X) = \sigma^2 \quad \sigma(X) = \sigma$

La variable aléatoire $T = \frac{X-m}{\sigma}$

Loi Normale Centrée Réduite $\mathscr{N}$ (0 , 1)

de densité de probabilité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{\left(-\frac{1}{2}t^2\right)}$

☞ **LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE:**

$E(T) = 0 \quad V(T) = 1 \quad \sigma(T) = 1$

EXEMPLE :

Les N boules d'une urne se répartissent en a boules blanches et b boules noires. N = a + b ;
On effectue n tirages dans cette urne.
On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur k le nombre de boules blanches obtenues après n tirages.

SCHÉMA DE BERNOULLI DÉFINITIONS

❈ EPREUVE DE BERNOULLI :
☞ C'est une épreuve aléatoire qui conduit a deux issues aléatoires contradictoires A,A (échec,réussite), (favorable,défavorable) de probabilités respectives p , q = 1-p.

❈ LE SCHEMA DE BERNOULLI consiste ($\mathscr{E}$) à répéter de façon indépendante n fois la même EPREUVE DE BERNOULLI.

☞ Soit X la variable aléatoire associée à($\mathscr{E}$) prenant pour valeur le nombre d'issues favorables (noté k) : p(X=k) = [voir ci-dessus] et
E(X) = np , V(X) = npq.

❈ Par convention on dit que :
X suit la loi Binomiale notée $\mathscr{B}$ (n , p)

EXEMPLE :

❈ EPREUVE DE BERNOULLI :
☞ Tirer une boule dans l'urne conduit a deux issues aléatoires contradictoires : boule blanche, boule noire, $p = {}^a/_N$, $q = {}^b/_N$.

SCHEMA DE BERNOULLI ?
❈ $\mathscr{E}$: tirage de n boules parmi N sans remise :
☞ X suit la loi hypergéométrique ,
p(X=k) =[voir ci-dessus]

☞ Dans le cas où N est grand par rapport à n , on peut considérer que les tirages sont indépendants et faire une approximation de X par la loi binomiale $\mathscr{B}$ (n , p)

☞ $\mathscr{E}$: tirage de n boules parmi N avec remise : on considère dans ce cas que la répétition des tirages les rend indépendants les uns des autres.
❈ X suit la loi binomiale $\mathscr{B}$ (n , p)