BTS BIOCHIMIE & ANALYSES BIOLOGIQUES 2003

Devoir n°X ; BTS 2 BIO&AB ;
Année scolaire 2002/2003
Le 8 Juin 2003

EXERCICE 1 (10 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A: Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2(x+1)e^x$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

❶ Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$ Déterminer la constante réelle a telle que la fonction h_1 définie par $h_1(x) = axe^{-0,25x}$ soit solution de (E).

❷ Déterminer les réels a et b de façon que la fonction g définie $\mathbb{R}$ par $h(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit une solution particulière de (E)

❸ En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

❹ Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f'(0) = 3$.

PARTIE B : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^x$. On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ; I ; J) d'unités graphiques : 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

❶ Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que pour $\alpha > 0$ la limite de la fonction définie par $x^\alpha e^x$ est nulle quand x tend vers $-\infty$.

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$.

❷ Montrer que $f'(x) = (x+1)(x+3)e^x$.

❸ En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

❹ Tracer la courbe $(\mathscr{C})$ dans le repère orthogonal : (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses ; 4 cm sur l'axe des ordonnées).

PARTIE C : Calcul d'aire

❶ Vérifier que $F(x) = (x^2 + 1)e^x$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

❷ En déduire l'aire exacte A, en cm2, de la partie du plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.

❸ Donner une valeur arrondie de A à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en plastique de longueur théorique 100 mm.

Les résultats numériques seront arrondis au centième près

PARTIE A : Loi normale

Une tige est considérée comme conforme pour la longueur lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, est dans l'intervalle [99,64 ; 100,36].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prise au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 0,16.

❶ Calculer la probabilité qu'une tige prise au hasard dans la production soit conforme pour la longueur .

❷ Déterminer le nombre réel a tel que $p(X<a) = 0,96$.

PARTIE B : Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, 2% des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.

On considère la variable aléatoire Y qui à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme.

❶ Pour cette question on prend n=50 :

a) Justifier que la variable aléatoireY suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) calculer p(Y=3).

❷ Pour cette question on prend n=100. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale que l'on peut approcher par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est la paramètre obtenu à la question 2.a. A l'aide de l'approximation de Y par Z, calculer la probabilité d'avoir au plus de 4 tiges de longueur non conforme.

PARTIE C : Test d'hypothèse

Un client reçoit un lot important de tiges de ce type. il peut vérifier que la moyenne μ de l'ensemble des longueurs, en mm, des tiges constituant ce lot est égal à la longueur théorique.

On note L la variable aléatoire qui , à chaque tige prélevée au hasard dans le lot , associe sa longueur en mm. La variable aléatoire L suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type 0,16.

On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 90 tiges prélevé dans le lot, associe la moyenne des longueurs de ces 90 tiges (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise). $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart - type $\sigma = \dfrac{0,16}{\sqrt{90}} \approx 0,017$

Le client construit un test d'hypothèse :

- ☞ L'hypothèse nulle est H_0 : $\mu = 100$
- ☞ L'hypothèse alternative est H_1 : $\mu \neq 100$
- ☞ Le seuil de signification est fixé à 5%

❶ Sous l'hypothèse nulle H_0, déterminer le réel positif h tel que :

$$p(100 - h < \overline{L} < 100 + h) = 0,95$$

❷ Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test ;

❸ Le client prélève un échantillon aléatoire de 90 tiges dans la livraison et il constate que la moyenne des longueurs de l'échantillon est de 100,04 mm. Le client estime que le fournisseur n'a pas respecté ses engagements et renvoie tout le lot.

Le client a-t-il raison ? justifier votre réponse.

EXERCICE 1 (10 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

☞ ***4,5 pts*** *PARTIE A: Résolution d'une équation différentielle*

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = 2(x+1)e^x$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$

☞ ***0,5 pt*** ❶ *Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.*

Solution :

(E_0) : $y'-y = 0$ (Equation différentielle linéaire sans second membre)

☞ ***0,5 pt*** La solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = C\,e^x$ avec C constante réelle positive.

☞ ***2 pt*** ❷ *Déterminer les réels a et b de façon que la fonction g définie $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ soit une solution particulière de (E)*

Solution :

Recherche d'une solution particulière g de (E) sous la forme $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$, x réel:

☞ ***0,5 pt*** Puisque $g(x) = (ax^2 + bx)e^x$ donc $g'(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2 + bx)e^x$;

g solution de (E) équivalent à : pour tout x réel ; $g'(x) - g(x) = (2ax+b)e^x + (ax^2 + bx)e^x - (ax^2 + bx)e^x$;

g solution de (E) équivalent à : pour tout x réel ; $g'(x) - g(x) = (2ax+b)e^x = 2(x+1)e^x$;

En divisant les deux membres par e^x nombre strictement positif pour tout x réel.

☞ ***1 pt*** g solution de (E) équivalent à : $2a = 2$ et $b = 2$; ainsi $a = 1$ et $b = 2$;

☞ ***0,5 pt*** La solution particulière de l'équation (E) est la fonction g définie sur IR par $g(x) = (x^2 + 2x)e^x$.

☞ ***0,5 pt*** ❸ *En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).*

Solution :

☞ ***0,5 pt*** La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) sur IR et d'une solution particulière de (E) : ce sont les fonctions définies sur IR par $y = f(x) = C\,e^x + (x^2 + 2x)e^x$, C constante réelle.

☞ ***1,5 pt*** ❹ *Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f'(0) = 3$.*

Solution :

Recherche de la solution particulière de (E) vérifiant la condition initiale $f'(x) = 3$:

f solution de (E) équivalent à : pour tout x réel ; $f'(x) - f(x) = 2(x+1)e^x$

☞ ***0,5 pt*** f solution de (E) équivalent à : pour tout x réel ; $f'(x) = f(x) + 2(x+1)e^x = C\,e^x + (x^2 + 2x)e^x + 2(x+1)e^x$

☞ ***0,5 pt*** $f'(3) = (C + 0 + 2)e^0 = 3$ donc : $C + 2 = 3$ donc $C = 1$.

☞ ***0,5 pt*** **La solution particulière de (E) est la fonction définie sur IR par $y = f(x) = (1 + x^2 + 2x)e^x = (x+1)^2e^x$.**

☞ ***5,5 pt*** *PARTIE B : Etude d'une fonction*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^x$. On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ; I ; J) d'unités graphiques : 1 cm en abscisse et 4 cm en ordonnée.

☞ ***1,5 pt*** ❶ *Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en $-\infty$ (on rappelle que pour $\alpha > 0$ la limite de la fonction définie par $x^\alpha e^x$ est nulle quand x tend vers $-\infty$.*

Solution :

☞ ***0 pt*** Changement de variable *:* $X = x + 1$, x tend vers $+\infty$ équivalent à X tend vers $+\infty$;

L'expression $f(x) = (x+1)^2 e^x$ est équivalente à $h(X) = X^2 e^{X+1} = eX^2 e^X$; ainsi les fonctions f(x) et h(X) admettrons même limite en $+\infty$ (du reste , il en sera de même pour $-\infty$) ;

☞ ***0,25 pt*** Quand X tend vers $+\infty$, alors h(X) n'est pas une forme indéterminée ; f(x) admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$;

☞ ***0,75 pt*** Quand X tend vers $-\infty$, alors h(X) est une forme indéterminée de forme $0\,(-\infty)$; par application de la propriété citée dans l'énoncé la fonction h(X) admet pour limite zéro quand X tend vers $-\infty$, donc f(x) admet pour limite zéro quand x tend vers $-\infty$;

☞ ***0,5 pt*** *En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$).*

La courbe admet pour asymptote l'axe des abscisses quand x tend vers $-\infty$

☞ ***0,5 pt*** ❷ *Montrer que $f'(x) = (x+1)(x+3)e^x$.*

Solution :

☞ ***0,5 pt*** f solution de (E) équivalent à :

pour tout x réel ; $f'(x) = (x+1)^2e^x + 2(x+1)e^x = (x+1)[(x+1) + 2]e^x = (x+1)[x+3]e^x$

☞ ***1 pt*** ❸ *En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.*

☞ ***0,5 pt*** Puisque : $e^x > 0$ pour x réel positif **[** ❋ ***0,25 pt*** **]** donc signe de $f'(t)$ = signe de $(x+1)(x+3)$;

Puisque $p(x) = (x+1)(x+3)$ est un polynôme du second degré donc son signe est positif (celui de $a = 1$) à l'extérieur des racines, à savoir ici $x_1 = -1$ et $x_2 = -3$;

☞ ***0,5 pt*** Tableau de signes de la fonction f :

pour $x < 10$ la dérivée est strictement négative donc la fonction f est strictement décroissante pour $x < 10$.

Tableau de variations :

☞ *0,5 **pt***

x	-∞		-3		-1		+∞
signe de f'(x)		positif	0	négatif	0	positif	
Variations de f(x)	0 ↗		f(-3)	↘	0	↗	+∞

Puisque $f'(x)>0$ sur $]-\infty ; -3]$ donc f est croissante strictement sur $]-\infty ; -3]$;

Puisque $f'(x)<0$ sur $]-3 ; -1]$ donc f est décroissante strictement sur $]-3 ; -1]$;

Puisque $f'(x)>0$ sur $]-1 ; +\infty]$ donc f est croissante strictement sur $]-3 ; +\infty]$;

☞ ***1 pt*** ❹ *Tracer la courbe (𝒞) dans le repère orthogonal : (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses ; 4 cm sur l'axe des ordonnées).* ***0,25 pt : échelle ; 0,25 pt : cadrage ; 0,5 pt : tracé courbe ;***

☞ ***1,5 pt*** *PARTIE C : Calcul d'aire*

☞ ***0,5 pt*** ❶ *Vérifier que $F(x)= (x^2+ 1) e^x$ est une primitive de f sur ℝ.*

<u>Solution :</u>

☞ ***0,5 pt*** Calcul de la dérivée de F(x) : soit $u(x) = (x^2+1)$ et $v(x) = e^x$, donc $u'(x) = 2x+1$ et $v'(x) = e^x$,

pour tout x réel ; $F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x+1) e^x + (x^2+1) e^x = (x+1)^2e^x=f(x)$; donc F(x) est une primitive de f(x) ;

☞ ***0,75 pt*** ❷ *En déduire l'aire exacte A, en cm2, de la partie du plan limitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=-1$ et $x=0$.*

<u>Solution :</u>

☞ ***0,75 pt*** L'Aire exacte de la partie délimitée = [F(0) - F(-1)] en unités d'aire ;

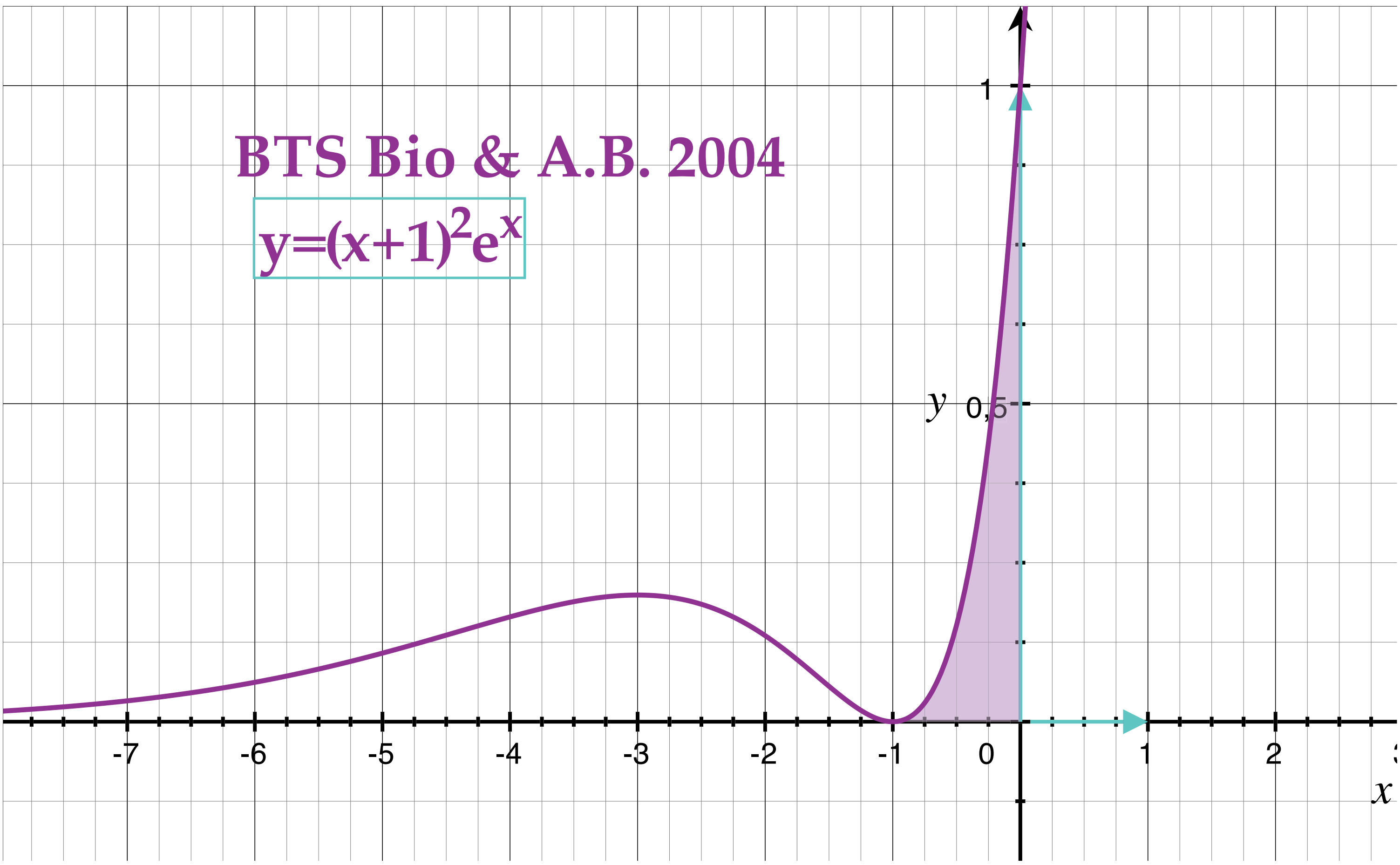
Calcul de l'unité d'aire : $1 \times 4 = 4$ cm^2

Aire de la partie délimitée = $[((0)^2+1)e^0 - ((-1)^2+1)e^{-1}] 4 = (1 -2/e) 4 = 4 - 8/e$

☞ ***0,25 pt*** ❸ *Donner une valeur arrondie de A à 10^{-2} près.*

<u>Solution :</u>

☞ ***0,25 pt*** L'Aire exacte de la partie délimitée en cm^2 = [F(0) - F(-1)] 4 = 4 [1 -2/e] ≈ 4 0,264 ≈ 1,06



EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges en plastique de longueur théorique 100 mm.
Les résultats numériques seront arrondis au centième près

PARTIE A : Loi normale

Une tige est considérée comme conforme pour la longueur lorsque sa longueur, exprimée en millimètres, est dans l'intervalle [99,64 ; 100,36].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque tige prise au hasard dans la production, associe sa longueur. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 0,16.

☞ ***3 pts*** ❶ *Calculer la probabilité qu'une tige prise au hasard dans la production soit conforme pour la longueur .*

☞ ***1,5 pt*** **Solution :**

❋ X la variable aléatoire qui, à un objet pris au hasard, associe sa masse suit la loi normale $\mathcal{N}(100 , 0{,}16)$

☞ ***0,5 pts*** Considérons la variable T définie par T = (X-100)/0,16 , T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 , 1)$

Calcul de p(99,46 ≤ X ≤ 100,36) :

$$99{,}46 \leq X \leq 100{,}36 \text{ équivalent à } 99{,}46 - 100 \leq X - 100 \leq 100{,}36 - 100$$

$$99{,}46 \leq X \leq 100{,}36 \text{ équivalent à } \frac{99{,}46 - 100}{0{,}16} \leq \frac{X - 100}{0{,}16} \leq \frac{100{,}36 - 100}{0{,}16}$$

$$99{,}46 \leq X \leq 100{,}36 \text{ équivalent à } -2{,}25 \leq T \leq 2{,}25$$

☞ ***0,5 pt***

☞ p(99,46 ≤ X ≤ 100,36) = p(-2,25 < T < 2,25) ; on applique les propriétés suivantes :

$p(-t_1 < T < t_1) = p (T < t_1) - p (T < -t_1) = \prod (t_1) - p (T < -t_1)$ et $p(T < -t_1) = 1 - p (T < t_1)= 1 - \prod (t_1)$

Donc $p(-t_1 < T < t_1) = p(|T| \leq t_1) = \prod (t_1) - (1 - \prod (t_1)) = 2\prod (t_1) -1$

☞ ***0,5 pt*** p(99,46 ≤ X ≤ 100,36) = 2∏ (2,25) -1 = 2 0,987 8 -1 = 0,975 6 ≈ **0,98**. (***- 0,25 pt si pas arrondi)***

☞ ***1,5 pt*** ❷ *Déterminer le nombre réel a tel que p(X<a) = 0,96.*

Solution :

❋ X la variable aléatoire qui, à un objet pris au hasard, associe sa masse suit la loi normale $\mathcal{N}(100 , 0{,}16)$;

☞ ***0,5 pt*** sachant que la variable T a été définie par T = (X-100)/0,16 , T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0 , 1)$;

Par équivalence : que $p(X < a) = 0{,}96 = p(T < t_\alpha)$

Calcul de t_α tel que $p(T < t_\alpha) = 0{,}96$; par lecture dans la table : p(T < 1,75) = 0,959 9 , p(T < 1,76) = 0,960 8 , sahant que les résultats doivent être donnés au centième près le plus proche , 1,75 est la valeur approchée demandée ,

☞ ***0,5 pt*** **Donc : $t_\alpha \approx 1{,}75$;**

☞ ***0,5 pt*** Puisque (X-100)/0,16 < 1,75 donc X < 100 - 0,16 1,75 et X < 100,28 ; **donc a = 100,28** .

PARTIE B : Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, 2% des tiges n'ont pas une longueur conforme. On prélève au hasard n tiges de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n tiges.

On considère la variable aléatoire Y qui à tout prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges de longueur non conforme.

❶ *Pour cette question on prend n=50 :*

☞ ***2 pt*** *a) Justifier que la variable aléatoireY suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.*

Solution :

☞ ***0,5 pt*** L'expérience aléatoire qui consiste , après chaque vérification , à mesurer la longueur d'une barre, conduit à deux issues contradictoires:

❋ C(barre) : l'objet n'est pas conforme avec la probabilité p = 0,02 ;

❋ C : l'objet est conforme avec la probabilité p = 1 - q =1 - 0,02 = 0,98 ;

☞ ***0,5 pt*** On peut considérer que la taille de l'échantillon n= 50 est petite par rapport à la taille de la population ;

☞ ***1 pt*** Ainsi Y la variable aléatoire qui, au prélèvement de 50 tiges, associe le nombre de tiges conformes suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n , p) c'est à dire $\mathcal{B}$ (50 , 0,02). **Les paramètres de $\mathcal{B}$ sont n=50 et p=0,02.**

De plus E(Y) = np = 50 0,02 = 1 et V(X) = np(1-p) = 50 0,98 0,02 ≈ 0,98.

☞ ***1 pt*** *b) calculer p(Y=3).*

Solution :

Soit l'évènement : « dans le lot de 50 objets 3 objets sont non conformes » : (Y = 3) ;)

☞ ***0,75 pt*** p(Y = 3) = (☞ ***0,25 pt)*** $50C3.\ 0{,}02^{3}.\ 0{,}98^{47}$ = 0,060 6 ≈ **0,06** ;

❷ *Pour cette question on prend n=100. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale que l'on peut approcher par une loi de Poisson.*

☞ ***0,5 pt*** *a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.*

☞ ***0,5 pt*** **Solution :**

Sachant que les paramètres de la loi binomiale sont n = 100 , p = 0,02 et np = 2 donc cette est rempli les conditions (n > 30 , p < 0,1 et np < 10) pour une approximation par une loi de Poisson de paramètre np = 2 ;

☞ ***1,5 pt*** *b) On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est la paramètre obtenu à la question 2.a. A l'aide de l'approximation de Y par Z, calculer la probabilité d'avoir au plus de 4 tiges de longueur non conforme.*

☞ ***1,5 pt*** **Solution :**

Soit l'évènement : « dans le lot de 50 objets 4 au plus objets sont non conformes » : ($Z \leq 4$) ;)

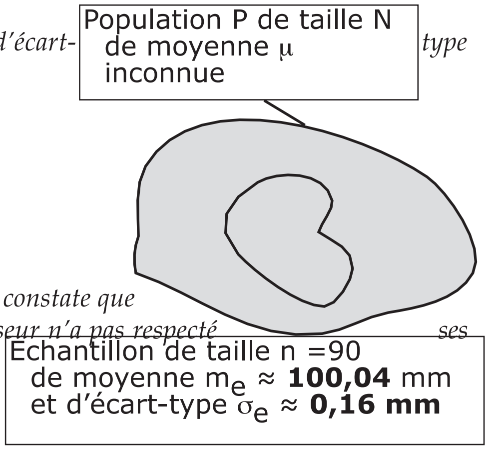
☞ ***0,75 pt*** $p(Z \leq 4) = p(Z = 0) + p(Z = 1) + p(Z = 2) + p(Z = 3) + p(Z = 4)=$

☞ ***0,75 pt*** $p(Z \leq 4) = 0,135 + 0,271 + 0,271 + 0,180 + 0,090 = 0,947 \approx$ **0,95** ;

PARTIE C : Test d'hypothèse

Un client reçoit un lot important de tiges de ce type. il peut vérifier que la moyenne μ de l'ensemble des longueurs, en mm, des tiges constituant ce lot est égal à la longueur théorique.

On note L la variable aléatoire qui , à chaque tige prélevée au hasard dans le lot , associe sa longueur en mm. La variable aléatoire L suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type 0,16.



Le client construit un test d'hypothèse :

L'hypothèse nulle est H_0 : $\mu = 100$

L'hypothèse alternative est H_1 : $\mu \neq 100$

Le seuil de signification est fixé à 5%

☞ ***1 pt*** ❶ *Sous l'hypothèse nulle H_0. déterminer le réel positif h tel que :*

☞ ***0,5 pt*** ❷ *Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test ;*

☞ ***0,5 pt*** ❸ *Le client prélève un échantillon aléatoire de 90 tiges dans la livraison et il constate que la moyenne des longueurs de l'échantillon est de 100,04 mm. Le client estime que le fournisseur n'a pas respecté ses engagements et renvoie tout le lot.*

Le client a-t-il raison ? justifier votre réponse.

☞ ***x,x pt*** **Solution :**

REMARQUE :

La question de la Partie C , test d'hypothèse est très mal présentée ; il suffirait de la rédiger comme suit :

Sachant que la moyenne des longueurs des 90 tiges du lot reçu est 100,04 mm construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, permettant d'affirmer, au risque de 5%, que le lot est conforme à la valeur standard μ_0 = 100 mm .

❷ - b) Quelle est la conclusion du test ?

CONSTRUCTION DU TEST BILATERAL:

❶ LOI D'ÉCHANTILLONNAGE :

☞ La variable aléatoire L(barre) qui, à tout échantillon de taille n=90, associe la moyenne des longueurs de tiges suit la loi normale $\mathcal{N}$(μ , 0,017) où μ est inconnu mais pour lequel on donne, à la question 3 un estimateur me = 100,04 mm

Soit $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque lot de taille n = 90 tiges de la livraison, associe la moyenne des longueurs de ces 90 tiges,

suit la loi normale $N\left(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ où μ est inconnu mais pour lesquels on connait

une approximation $\widehat{\mu} = m_e$ et $\widehat{\sigma} = \sigma_e = 0,16$

❷ HYPOTHÈSE À TESTER : hypothèse nulle (H_0) , valeur standard μ_0 = 100 mm ;

☞ (H_0) : « la moyenne des longueurs des tiges constituant ce lot est bien égal à 100 mm »; « $\mu = \mu_0$ » ;

Dès que vous formulez cette hypothèse vous devez , en même temps, imaginer l'hypothèse alternative qui doit être contradictoire ; c'est à dire prendre en compte sous la forme (H_0) : « la moyenne des longueurs des tiges esttrès peu différente de la valeur standard 100 (on n'accorde pas d'intérêt particulier au fait que la valeur moyenne soit supérieure ou inférieure »

Le terme " peu différente " implique un test bilatéral.

❸ HYPOTHÈSE ALTERNATIVE - NATURE DU TEST :

☞ (H_1) : « la moyenne des longueurs des tiges constituant ce lot est différente de 100 mm »; « $\mu \neq \mu_0$ » ;

Le test est bilatéral ; c'est à dire (H_1) : « $\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0$ »

❹ CONDITIONS DE REJET (H_0) AU RISQUE 5% :

☞ ***Remarque :*** *il s'agit de vérifier que μ ou – plutôt la valeur moyenne calculée sur un lot de 90 tiges : m_e – appartient ou non à un intervalle d'acceptation centré en μ_0 = 100, dont l'amplitude dépend du seuil de confiance. Le test d'hypothèse est construit à partir d'un outil bien connu : l'intervalle de confiance ; si m_e appartient à l'intervalle, alors (H_0) est vérifiée. Pour réaliser ce calcul nous disposons d'un outil : c'est la loi normale qui, en fonction de ses caractéristiques μ et σ , permettra de calculer cette amplitude.*

❇ Sous l'hypothèse (H_0) :

Sous (H_0) : $\mu = \mu_0$, $\overline{L}$ suit la loi normale $N\left(\mu_0 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ équivalent à $T = \frac{\overline{L} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale N(0,1) ; $\sigma\left(\overline{L}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{0,16}{\sqrt{90}}$

v ❉ Considérons les deux méthodes :

Remarque : *à partir de là deux méthodes sont préconisées :*

Première méthode : *la condition de rejet sera formulée sur la fonction L (L barre) .*

Seconde méthode : *la condition de rejet sera formulée en utilisant la variable* $T = {}^{L\text{-}100}/_{\sigma(L)}$ *; L (L barre).*

Sous (H_0) : $\mu = \mu_0$, $\bar{L}$ suit la loi normale $N\left(\mu_0 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ équivalent à $T = \frac{\bar{L} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale N(0,1) ; $\sigma(\bar{L}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{0,16}{\sqrt{90}}$

☛ **PREMIÈRE MÉTHODE :**

☞ On recherche un intervalle centré en μ_0 : [μ_0 -h ; μ_0 + h] tel que l'on ait 95% de chances d'avoir µ proche de μ_0 , c'est à dire p(-h < L (L barre) - μ_0 < h) = 0,95 ; c'est à dire p(-h < L (L barre) - 100 < h) = 0,95 ;

; c'est à dire p(100 -h < L (L barre) < 100 + h) = 0,95 ;

Sous (H_0) : $\mu = \mu_0$, $\bar{L}$ suit la loi normale $N\left(\mu_0 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ équivalent à $T = \frac{\bar{L} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale N(0,1) ; $\sigma(\bar{L}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{0,16}{\sqrt{90}}$

En fait nous avons toute latitude pour rechercher cet intervalle d'acceptation et de refus de (H_0) au risque 5% ;

Il est possible à partir d'un intervalle centré en $\mu_0 = 100$ de rechercher h le rayon de l'intervalle d'acceptation: $p\left(\left|\bar{L} - 100\right| < h\right)$

Il est possible de rechercher un intervalle $[\mu_0 - h ; \mu_0 + h]$ centré en $\mu_0 = 100$: $p\left(\mu_0 - h < \bar{L} < \mu_0 + h\right) = 0,95$

Ainsi : $p\left(\mu_0 - h < \bar{L} < \mu_0 + h\right) = 0,95$ équivalent à $p\left(|T| < t_\alpha\right) = 0,95$; on sait que $t_\alpha = 1,96$

Ainsi : $|T| < 1,96$ équivalent à $\left|\frac{\bar{L} - 100}{\sigma(\bar{L})}\right| < 1,96$ équivalent à $\left|\bar{L} - 100\right| < 1,96\ \sigma(\bar{L})$

En clair : pour | L (L barre) -100 | ≤ d ; il y a 95 % de chances d'avoir µ proche de μ_0 ; d= 1,96 0,017 ≈ 0,033

❉ Conditions de rejet de (H_0) :

Si | L (L barre) -100 | ≤ 0,033 ou si L (L barre) appartient à [99,967 ; 100,033] : on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si | L (L barre) -100 | ≥ 0,033 ou si L (L barre) n'appartient pas à [99,967 ; 100,033] : on refuse (H_0) au risque 5 % ;

☛ **SECONDE MÉTHODE :**

☞ On recherche un intervalle centré en 0 : [-h ; h] tel que l'on ait 95% de chances d'avoir µ - μ_0 proche de 0 ;

La démonstration est la même puisque ma méthode est basée sur l'utilisation de la variable aléatoire T qui est pratiquement le seul outil capable de nous permettre le calcul d'un intervalle de confiance :

❉ En conclusion :

Si | T | ≤ 1,96 : on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si | T ≥ 1,96 : on refuse (H_0) au risque 5 % ;

❻ **MISE EN OEUVRE DU TEST :**

☛ **PREMIÈRE MÉTHODE :**

❉ Calcul de x = m_e - 100 = 100,04 - 100 = 0,04 ; ou encore 100,04 n'appartient pas à [99,967 ; 100,033] ;

❉ puisque | x | ≤ 0,008 ou puisque 29,994 n'appartient à [24,992 ; 25,008], on refuse (H_0) au risque 5 % ;

☛ **SECONDE MÉTHODE :**

❉ $t = \frac{m_e - 100}{\sigma(\bar{L})} = \frac{100,04 - 100}{0,017} = 2,35$

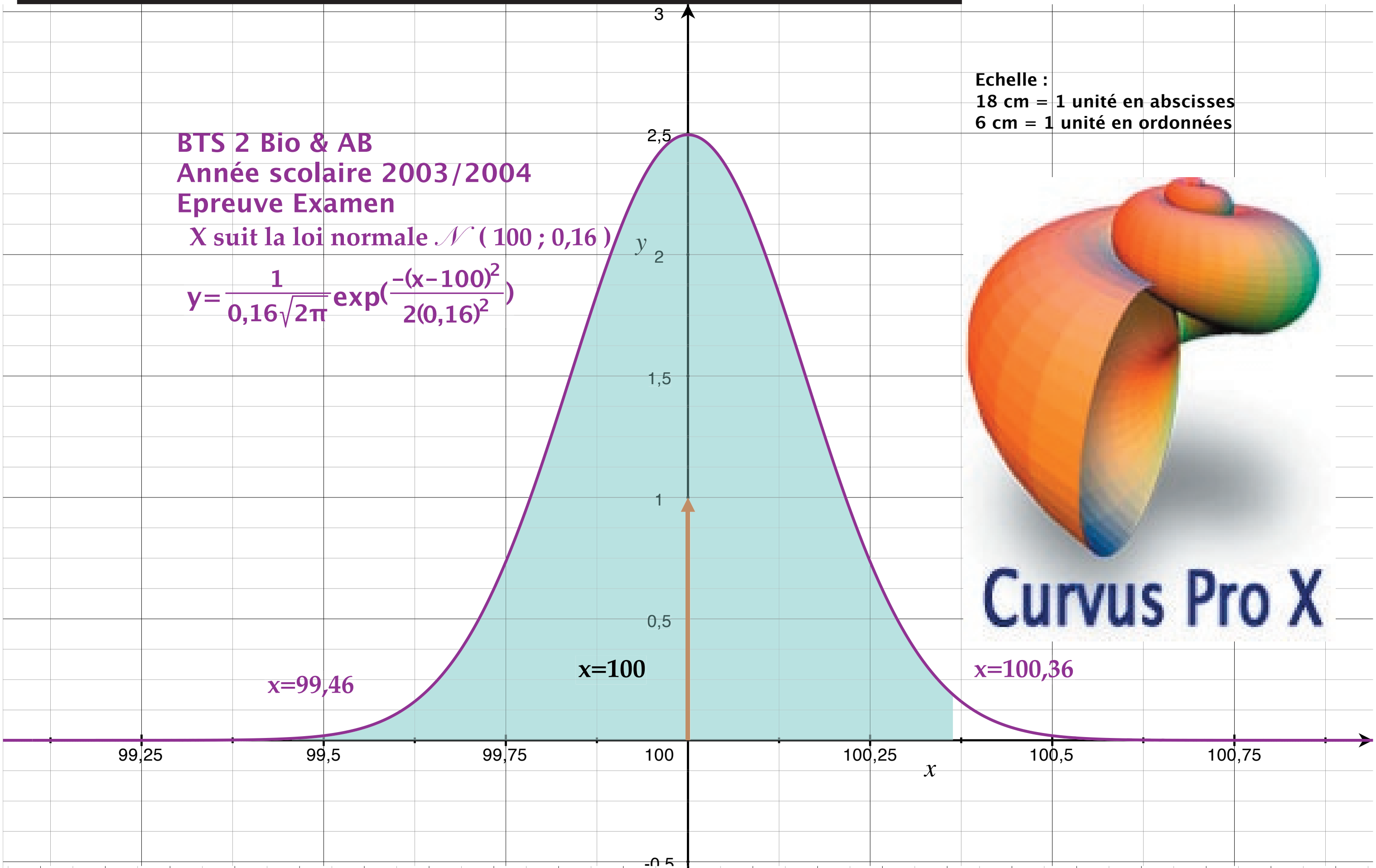
❉ puisque | t | > 1,96 , on refuse (H_0) au risque 5 % ;

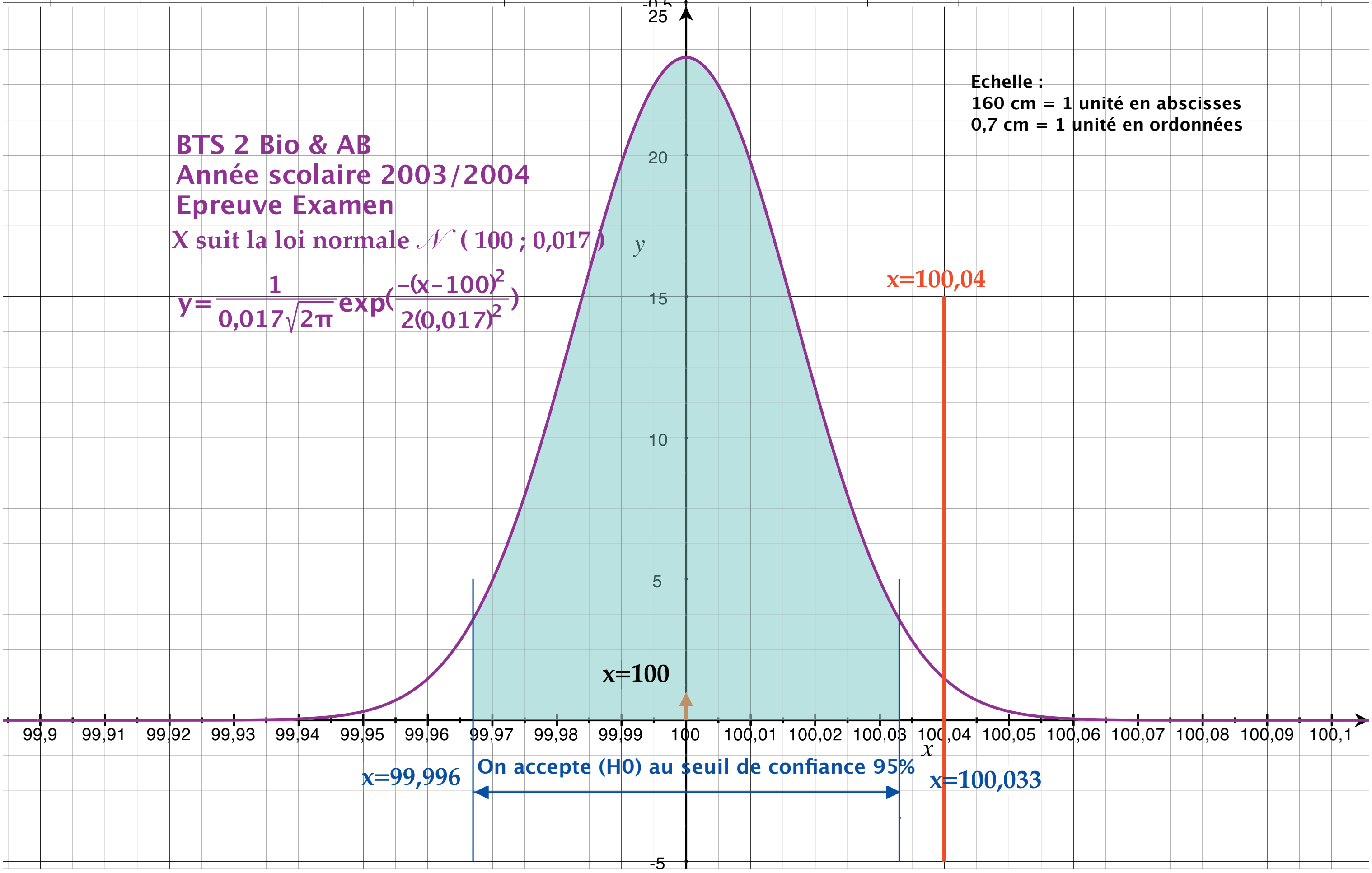
❼ **DÉCISION :**

Au risque 5 % le lot n'est pas conforme à la valeur standard.

☞ Le fournisseur n'a pas respecté ses engagements.

i.scool


Echelle :
18 cm = 1 unité en abscisses
6 cm = 1 unité en ordonnées
BTS 2 Bio & AB
Année scolaire 2003/2004
Epreuve Examen
X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (100 ; 0,16)
$y=\frac{1}{0,16\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-(x-100)^2}{2(0,16)^2})$
Curvus Pro X
x=99,46
x=100
x=100,36
3
2,5
2
1,5
1
0,5
-0,5
y
99,25
99,5
99,75
100
100,25
100,5
100,75
x


Echelle :
160 cm = 1 unité en abscisses
0,7 cm = 1 unité en ordonnées
BTS 2 Bio & AB
Année scolaire 2003/2004
Epreuve Examen
X suit la loi normale $\mathcal{N}$ (100 ; 0,017)
$y=\frac{1}{0,017\sqrt{2\pi}}\exp(\frac{-(x-100)^2}{2(0,017)^2})$
x=100,04
x=100
x=99,996
On accepte (H0) au seuil de confiance 95%
x=100,033
25
20
15
10
5
-5
y
99,9
99,91
99,92
99,93
99,94
99,95
99,96
99,97
99,98
99,99
100
100,01
100,02
100,03
100,04
100,05
100,06
100,07
100,08
100,09
100,1
x