CALCUL INTÉGRAL

I – AIRES :

☞ Une fonction étant définie – par son expression f(x) – continue, positive sur l'intervalle [a, b], l'aire A de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe d'équation y = f(x), par les deux droites verticales d'équation x=a et x=b est notée :

$$A = \int_a^b f(x)dx \text{ en unités d'aire}$$

La définition tient compte des échelles adoptées sur l'axe des abscisses et des ordonnées.

II – PRIMITIVE D'UNE FONCTION :

☞ Une fonction f définie et continue sur [a, b] admet au moins une primitive généralement notée F sur [a, b] :

En fait pour tout x de [a, b] : F′(x) = f(x) donc F est la dérivée de F.

La recherche de la primitive se fit par l'opération inverse de la dérivation.

III – CALCUL DE L'AIRE :

☞ Par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

IV – NOTATIONS ET ABUS DE NOTATION :

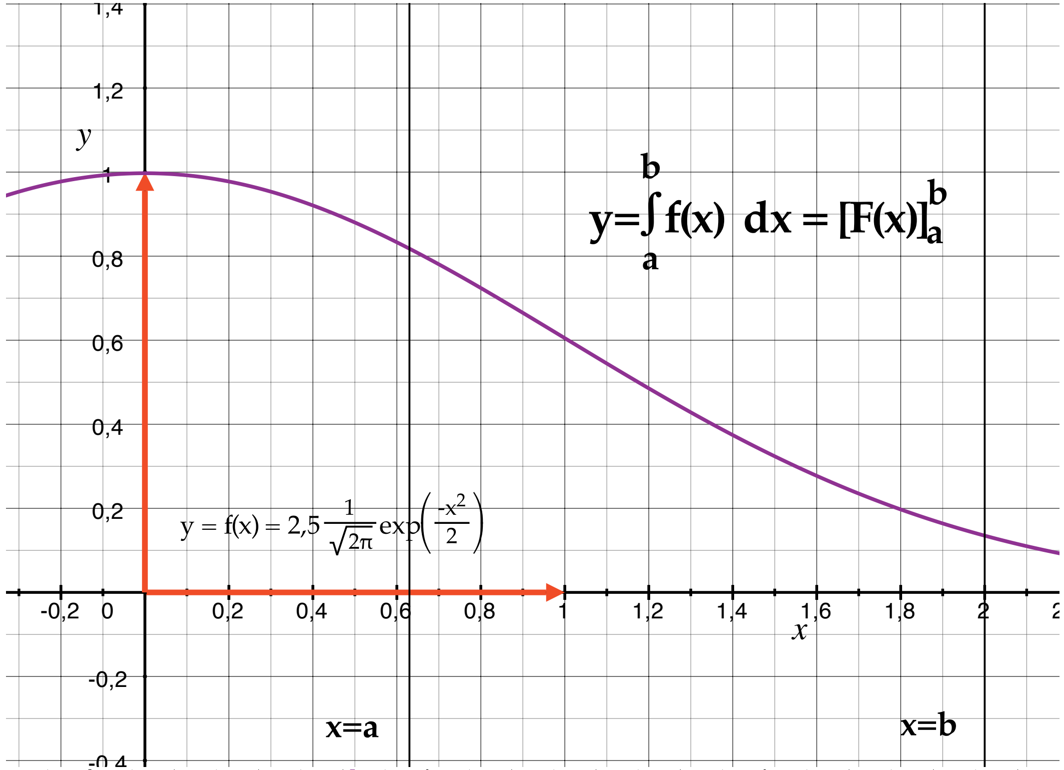
☞ Par définition :

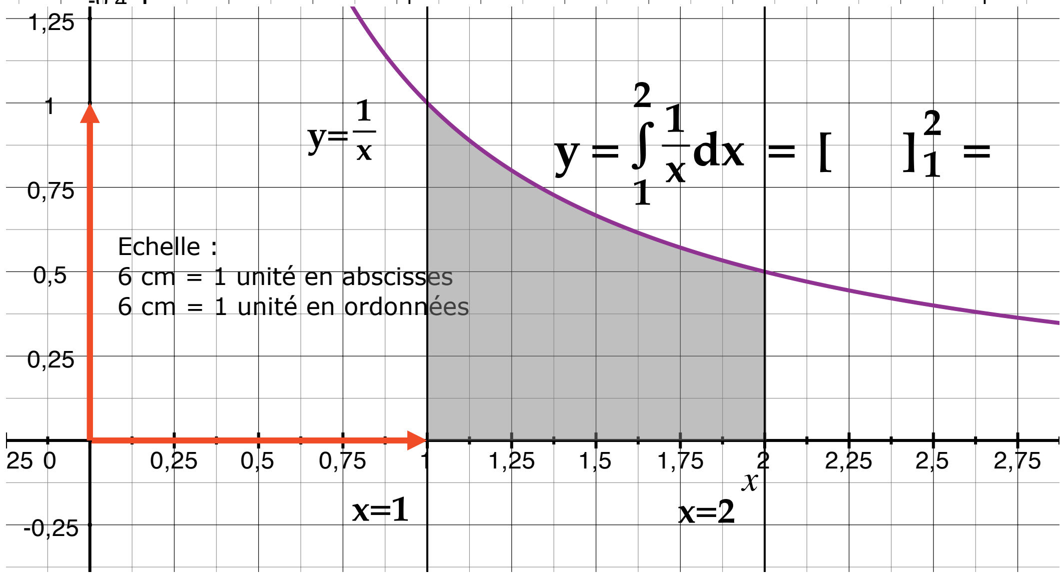
Manière d'écrire que la fonction f admet pour primitive F

$$\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

☞ Par abus de notation, mais par convention on écrit :

$$\int f(t)dt = F(x) + k$$

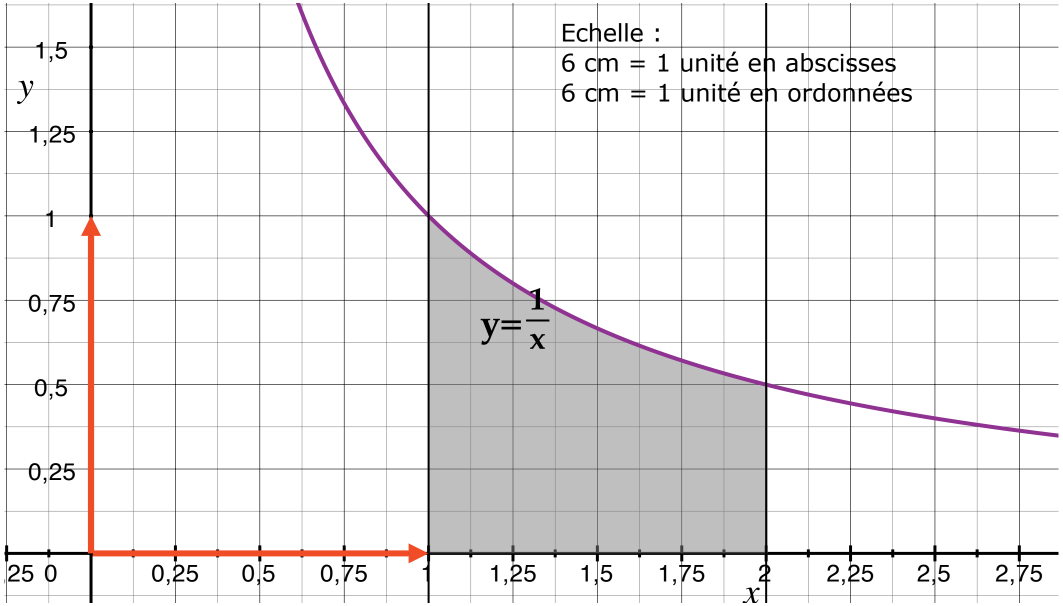




IV – VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION SUR L'INTERVALLE [a,b]:

☞ Par définition :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = \frac{F(b)-F(a)}{b-a}$$



V – UTILISATION D'UNE NOTATION:

Lors de la résolution d'une équation différentielle nous avons besoin d'intégrer les 2 membres d'une égalité . Cette notation nous permet de faciliter la présentation.
Exemple n°1

$\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $\frac{dx}{dt} = k(0{,}2 - x)$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $\frac{dx}{(0{,}2 - x)} = k\,dt$

$\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $\frac{dx}{dt} = k(0{,}2 - x)$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $\int \frac{1}{(0{,}2 - x)}dx = \int k\,dt + c$

Remarque : $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ par primitivation $\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx = \ln(u(x)) + c$

puisque : $u(x) = (0{,}2 - x)$ donc $u'(x) = -1$

donc $\frac{1}{(0{,}2 - x)}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{(0{,}2 - x)} = -\frac{-1}{(0{,}2 - x)} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$

$\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $\frac{dx}{dt} = k(0{,}2 - x)$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $-\int \frac{-1}{(0{,}2 - x)}dx = \int k\,dt + c$

$\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $\frac{dx}{dt} = k(0{,}2 - x)$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $-\ln(0{,}2 - x) = kt + c$

$\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $\frac{dx}{dt} = k(0{,}2 - x)$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le x < 0{,}2 \end{cases}$; $0{,}2 - x = e^{-(kt + c)}$

$\begin{cases} t>0 \\ 0 \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\frac{dy}{dt} = a(0{,}01 - y)^2$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\frac{1}{(0{,}01 - y)^2}dy = a\,dt$

$\begin{cases} t>0 \\ \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\frac{dy}{dt} = a(0{,}01 - y)^2$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\int \frac{1}{(0{,}01 - y)^2}dy = \int a\,dt + c$

Remarque : $\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$ par primitivation $\int -\frac{u'(x)}{u(x)^2}dx = \frac{1}{u(x)} + c$

puisque : $u(y) = (0{,}01 - y)$ donc $u'(y) = -1$

donc $\frac{1}{(0{,}01 - y)^2}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{1}{(0{,}01 - y)^2} = -\frac{-1}{(0{,}01 - y)^2} = -\frac{u'(x)}{u(x)^2}$

$\begin{cases} t>0 \\ \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\frac{dy}{dt} = a(0{,}01 - y)^2$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\int -\frac{-1}{(0{,}01 - y)^2}dx = \int k\,dt + c$

$\begin{cases} t>0 \\ 0 \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\frac{dy}{dt} = a(0{,}01 - y)^2$ équivalent à $\begin{cases} t>0 \\ 0 \le y < 0{,}01 \end{cases}$; $\frac{1}{(0{,}01 - y)} = at + c$