BTS BIOCHIMIE & ANALYSES BIOLOGIQUES 200X

Devoir n°#1 ; BTS 2 BIO&AB ;
Année scolaire 2004/2005
Le 8 Septembre 2004

EXERCICE 1 (10 points)

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A: Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = 2 (x - 1) e^{-x}$ où y désigne une fonction de la variable réelle x définie et dérivable sur l'ensemble des réels $\mathbb{R}$; y' désigne sa fonction dérivée ;

❶ Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' + y = 0$.

❷ Déterminer les réels a et b de façon que la fonction g définie $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax^2 + bx)e^{-x}$ soit une solution particulière de (E)

❸ En déduire la solution générale de l'équation différentielle (E).

❹ Déterminer la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f'(3) = 0$.

PARTIE B : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x- 1)^2 e^{-x}$. On note ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ; I ; J) d'unités graphiques : 1 cm en abscisse et 1 cm en ordonnée.

❶ Déterminer la limite de f en $+ \infty$ et la limite de f en $- \infty$ (on rappelle que pour $\alpha > 0$ la limite de la fonction définie par $x^{\alpha} e^x$ est nulle quand x tend vers $- \infty$.

En déduire l'existence d'une asymptote à la courbe ($\mathscr{C}$).

❷ Montrer que $f'(x) = (x-1)(3-x)e^{-x}$.

❸ En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation de la fonction f.

❹ Tracer la courbe ($\mathscr{C}$) dans le repère orthogonal : (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses ; 1 cm sur l'axe des ordonnées).

PARTIE C : Calcul d'aire

❶ Vérifier que $F(x)= -(x^2+ 1) e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

❷ En déduire l'aire exacte A, en cm2, de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

❸ Donner une valeur arrondie de A à 10^{-2} près.

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Une entreprise fabrique en grande quantité des doses de liquide de volume théorique 60 ml.

Les résultats numériques seront arrondis au centième près après avoir exécuter les calculs au millième près

PARTIE A : Loi normale

Une dose est considérée comme conforme pour le volume lorsque son volume, exprimée en millilitres, est dans l'intervalle [59,72 ; 60,28].

On note X la variable aléatoire qui, à chaque dose prise au hasard dans la production, associe son volume. On suppose que X suit la loi normale de moyenne 60 et d'écart-type 0,16.

❶ Calculer la probabilité qu'une dose prise au hasard dans la production soit conforme pour le volume .

❷ Déterminer le nombre réel a tel que $p(X<a) = 0,96$.

PARTIE B : Loi binomiale et loi de Poisson

Dans un lot de ce type de tiges, 8% des doses n'ont pas un volume conforme. On prélève au hasard n doses de ce lot pour vérification de longueur. Le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n doses.

On considère la variable aléatoire Y qui à tout prélèvement de n doses, associe le nombre de doses de volume non conforme.

❶ Pour cette question on prend n=50 :

a) Justifier que la variable aléatoireY suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

b) calculer p(Y=3).

❷ Pour cette question on prend n=100. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale que l'on peut approcher par une loi de Poisson.

a) Déterminer le paramètre λ de cette loi de Poisson.

b) On désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ où λ est la paramètre obtenu à la question 2.a. A l'aide de l'approximation de Y par Z, calculer la probabilité d'avoir au plus de 6 doses de volume non conforme.

<u>PARTIE C : Test d'hypothèse</u>

Un client reçoit un lot important de doses de ce type. il peut vérifier que la moyenne μ de l'ensemble des volumes, en ml, des doses constituant ce lot est égal au volume théorique.

On note L la variable aléatoire qui , à chaque dose prélevée au hasard dans le lot , associe son volume en ml. La variable aléatoire L suit la loi normale de moyenne inconnue μ et d'écart-type 0,16.

On désigne par $\overline{L}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 90 doses prélevé dans le lot associe la moyenne des volumes de ces 90 doses (le lot est assez important pour que l'on puisse assimiler ces prélèvements à des tirages avec remise) . $\overline{L}$ suit la loi normale de moyenne μ et d'écart-type $\sigma = \dfrac{0{,}16}{\sqrt{90}} \approx 0{,}017$

Le client construit un test d'hypothèse :

- ☞ L'hypothèse nulle est $H_0 : \mu = 60$
- ☞ L'hypothèse alternative est $H_1 : \mu \neq 60$
- ☞ Le seuil de signification est fixé à 5%

❶ Sous l'hypothèse nulle H_0. déterminer le réel positif h tel que :

$$p(60 - h < \overline{L} < 60 + h) = 0{,}95$$

❷ Enoncer la règle de décision permettant d'utiliser ce test ;

❸ Le client prélève un échantillon aléatoire de 90 doses dans la livraison et il constate que la moyenne des volumes de l'échantillon est de 60,24 ml. Le client estime que le fournisseur n'a pas respecté ses engagements et renvoie tout le lot.

Le client a-t-il raison ? justifier votre réponse.