BTS ANALYSES BIOLOGIQUES 1994

Devoir #1 ; BTS 1 Analyses Biologiques ;
Année scolaire 2005/2006

Les calculatrices de poche sont autorisées. Le formulaire officiel est autorisé.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)

Un médicament dosé à 5 mg de principe actif est absorbé par voie orale. Le principe actif traverse la muqueuse intestinale, passe dans le sang, puis est éliminé. On appelle $Q(t)$ la quantité de principe actif, exprimé en mg, présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$ donné en heures) et f la fonction définie pour $t \geq 0$ par la condition (C) suivante :

$$(C)\ f(t) = Q'(t)$$

Après étude on constate que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = -1{,}25\, e^{-0{,}5t} \text{, et quelle vérifie } f(0) = 2{,}5$$

① – Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire l'expression de $f(t)$. (on pourra chercher une solution particulière de la forme $h(t) = k\, e^{-0{,}5t}$, k étant un réel à déterminer) ;

② – Vérifier que la fonction Q définie pour tout $t \geq 0$ par $Q(t) = 5\,(e^{-0{,}5t} - e^{-t})$ satisfait la condition (C) de l'énoncé .

③ – Etudier la fonction Q sur l'intervalle $[\, 0 , +\infty\, [$. On montrera que Q admet un maximum dont on précisera la valeur exacte et on calculera la limite de Q en $+\infty$.

Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour 1 heure sur l'axe des abscisses, 10 cm pour 1 mg sur l'axe des ordonnées).

EXERCICE 2 (10 points)

On s'intéresse, dans cet exercice , aux allergies déclenchées par deux médicaments A et B. Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques à A , et que 40% sont allergiques à B.

Partie I : En supposant que les allergies à A et B indépendantes, quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit :

① – allergique à A ?
② – allergique à B ?
③ – allergique à A et à B ?
④ – allergique à A ou à B ?

Partie II :

Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. on désigne par X le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent. on admet que X suit une loi binomiale:

① – On suppose n = 10 , calculer, à 10^{-3} près, les probabilités de chacun des évènements suivants

E_1 : aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;
E_2 : au moins 2 analyses révèlent l'allergie à A ;

② – On suppose maintenant n = 100. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre. Calculer alors à 10^{-3} près la probabilité de l'évènement $X \leq 3$.

③ – Dans l'échantillon précédent (n = 100), on a observé que 31 individus révèlent l'allergie B.

Au seuil de risque 0,05 peut-on conclure que l'échantillon est représentatif de la population pour l'allergie B ? et au risque 0,10 ?

Les calculatrices de poche sont autorisées. Le formulaire officiel est autorisé.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (10 points)

Un médicament dosé à 5 mg de principe actif est absorbé par voie orale. Le principe actif traverse la muqueuse intestinale, passe dans le sang, puis est éliminé. On appelle Q(t) la quantité de principe actif, exprimé en mg, présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$ donné en heures) et f la fonction définie pour $t \geq 0$ par la condition (C) suivante :

$$(C)\ f(t) = Q'(t)$$

Après étude on constate que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E_1) : y' + y = -1{,}25\, e^{-0{,}5t} \text{ , et quelle vérifie } f(0) = 2{,}5$$

① – Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire l'expression de f(t) . (on pourra chercher une solution particulière de la forme $h(t) = k\, e^{-0{,}5t}$, k étant un réel à déterminer) ;

② – Vérifier que la fonction Q définie pour tout $t \geq 0$ par $Q(t) = 5 (e^{-0{,}5t} - e^{-t})$ satisfait la condition (C) de l'énoncé .

③ – Etudier la fonction Q sur l'intervalle $[0 , +\infty [$. On montrera que Q admet un maximum dont on précisera la valeur exacte et on calculera la limite de Q en $+\infty$.

Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthogonal (unités graphiques : 2 cm pour 1 heure sur l'axe des abscisses, 10 cm pour 1 mg sur l'axe des ordonnées).

EXERCICE 2 (10 points)

On s'intéresse, dans cet exercice , aux allergies déclenchées par deux médicaments A et B. Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques à A , et que 40% sont allergiques à B.

__Partie I :__ En supposant que les allergies à A et B indépendantes, quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit :

① – allergique à A ?
② – allergique à B ?
③ – allergique à A et à B ?
④ – allergique à A ou à B ?

__Partie II :__

Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. on désigne par X le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent. on admet que X suit une loi binomiale:

① – On suppose n = 10 , calculer, à 10^{-3} près, les probabilités de chacun des évènements suivants

E_1 : aucune analyse ne révèle l'allergie à A ;

E_2 : au moins 2 analyses révèlent l'allergie à A ;

② – On suppose maintenant n = 100. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre. Calculer alors à 10^{-3} près la probabilité de l'évènement $X \leq 3$.

③ – Dans l'échantillon précédent (n = 100), on a observé que 31 individus révèlent l'allergie B.

Au seuil de risque 0,05 peut-on conclure que l'échantillon est représentatif de la population pour l'allergie B ? et au risque 0,10 ?

Un médicament dosé à 5 mg de principe actif est absorbé par voie orale. Le principe actif traverse la muqueuse intestinale, passe dans le sang, puis est éliminé. On appelle Q(t) la quantité de principe actif, exprimé en mg, présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$ donné en heures) et f la fonction définie pour $t \geq 0$ par la condition (C) suivante :

$$(C)\ f(t) = Q'(t)$$

Après étude on constate que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

(E) : $y' + y = -1{,}25\ e^{-0{,}5t}$, et quelle vérifie $f(0) = 2{,}5$

① – Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire l'expression de f(t) . (on pourra chercher une solution particulière de la forme $h(t) = k\ e^{-0{,}5t}$, k étant un réel à déterminer) ;

Solution :

f définie pour $t \geq 0$ est solution de l'équation différentielle :

(E) : $y' + y = -1{,}25\ e^{-0{,}5t}$, et $f(0) = 2{,}5$

Méthode n°1 (application du théorème fondamental)

① a) Résolution de (E_1) l'équation (différentielle linéaire) homogène associée :

(E_1) : $y' + y = 0$

<u>La solution générale de l'équation (différentielle linéaire) homogène est l'ensemble des fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = g(t) = C\ e^{-t}$, C constante réelle.</u>

☞ b) Recherche d'une solution particulière h de (E) sous la forme $h(t) = k\ e^{-0{,}5t}$, t réel:

Puisque $h(t) = k\ e^{-0{,}5t}$ donc $h'(t) = -0{,}5\ k\ e^{-0{,}5t}$.

h solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $h'(t) + h(t) = -1{,}25\ e^{-0{,}5t}$

h solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [;$-0{,}5\ k\ e^{-0{,}5t} + k\ e^{-0{,}5t} = -1{,}25\ e^{-0{,}5t}$

En divisant les deux membres par $e^{-0{,}5t}$ nombre strictement positif.

h solution de (E) équivalent à : $-0{,}5\ k + k = -1{,}25$

Ainsi $k = -1{,}25/0{,}5 = -2{,}5$

La solution particulière de l'équation (différentielle linéaire) (E) est l'ensemble des fonctions h définies sur [0 ; + ∞ [par $h(t) = -2{,}5\ e^{-0{,}5t}$.

☞ c) Application du théorème général :

La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_1) et d'une solution particulière de (E) : ce sont les fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = C\ e^{-t} + -2{,}5\ e^{-0{,}5t}$, C constante réelle.

Recherche de la solution particulière de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 2{,}5$:

$f(0) = C\ e^{0}\ -2{,}5\ e^{0} = 2{,}5$ donc : $f(0) = C - 2{,}5 = 2{,}5$ donc $C = 5$.

La solution particulière de (E) est la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = 5\ e^{-t} + -2{,}5\ e^{-0{,}5t}$.

Méthode n°2 : méthode dite de " variation des constantes "

☞ a) Résolution de (E_1) l'équation (différentielle linéaire) homogène associée :

(E_1) : $y' + y = 0$

La solution générale de l'équation (différentielle linéaire) homogène est l'ensemble des fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = g(t) = C\ e^{-t}$, C constante réelle.

☞ b) Recherche d'une solution de (E) sous la forme $f(t) = u(t)\ e^{-t}$, t réel où u est une fonction inconnue définie et dérivable sur [0 ; + ∞ [.

Puisque $f(t) = u(t)\ e^{-t}$ donc $f'(t) = u'(t)\ e^{-t} - u(t)\ e^{-t}$.

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $f'(t) + f(t) = -1{,}25\, e^{-0{,}5t}$

f solution de (E) équivalent à :

pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u'(t)\, e^{-t} - u(t)\, e^{-t} + u(t)\, e^{-t} = -1{,}25\, e^{-0{,}5t}$

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u'(t)\, e^{-t} = -1{,}25\, e^{-0{,}5t}$

sachant que la quantité e^{-t} est strictement positive pour tout t réel :

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u'(t) = -1{,}25\, e^{-0{,}5t}\, e^{t} = -1{,}25\, e^{0{,}5t}$

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u(t) = -{}^{1{,}25}/_{0{,}5}\, e^{0{,}5t} + k = -2{,}5\, e^{0{,}5t} + k$.

La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = k\, e^{-t} - 2{,}5\, e^{-0{,}5t}$, k constante réelle.

Recherche de la solution particulière de (E) vérifiant la condition initiale f(0) = 2,5 :

$f(0) = k\, e^{0} - 2{,}5\, e^{0} = 2{,}5$ donc : $f(0) = k - 2{,}5 = 2{,}5$ donc $k = 5$.

La solution particulière de (E) est la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = 5\, e^{-t} + -2{,}5\, e^{-0{,}5t}$.

② – Vérifier que la fonction Q définie pour tout t ≥ 0 par $Q(t) = 5\,(e^{-0{,}5t} - e^{-t})$ satisfait la condition (C) de l'énoncé : (C) $f(t) = Q'(t)$

Puisque $f(t) = 5\, e^{-t} - 2{,}5\, e^{-0{,}5t}$ donc ,en intégrant, $Q(t) = 5\,(-e^{-t}) - {}^{2{,}5}/_{(-0{,}5)}\, e^{-0{,}5t} + k$

Donc : $Q(t) = 5\,(-e^{-t}) - {}^{2{,}5}/_{(-0{,}5)}\, e^{-0{,}5t} + k = 5\,(-e^{-t}) + 5\, e^{-0{,}5t} + k = 5\,(-e^{-t} + e^{-0{,}5t}) + k$

Sachant que la quantité de principe actif absorbée au départ est nulle donc Q(0) = 0.

Recherche de la solution particulière de (C) vérifiant la condition initiale Q(0) = 0.

$Q(0) = 5\,(e^{-0} - e^{0}) + k = k = 0$.

La solution particulière de (C) est la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $Q(t) = 5\,(e^{-0{,}5t} - e^{-t})$.

③ – Etudier la fonction Q sur l'intervalle [0 , + ∞ [. On montrera que Q admet un maximum dont on précisera la valeur exacte et on calculera la limite de Q en +∞ .

☞ Etude de la fonction Q en + ∞ :

puisque $\lim_{t \to \infty} e^{-0{,}5t} = 0$ et que $\lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0$ donc $\lim_{t \to \infty} Q(t) = 0$

☞ Calcul de la dérivée :

$Q'(t) = f(t) = 5\, e^{-t} + -2{,}5\, e^{-0{,}5t} = 5\, e^{-t}\,(1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t})$ sachant que $5\, e^{-t}$ est strictement positif donc signe de $Q'(t)$ = signe de $(1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t})$.

Résolution de l'inéquation : $1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t} \geq 0$ pour t de [0 ; + ∞ [:

$1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t} \geq 0$ équivalent à $2 - e^{0{,}5t} \geq 0$

$1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t} \geq 0$ équivalent à $2 \geq e^{0{,}5t}$

$1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t} \geq 0$ équivalent à $\ln 2 \geq \ln e^{0{,}5t}$ (la fonction ln est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [ )

$1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t} \geq 0$ équivalent à $\ln 2 \geq 0{,}5t$

$1 - 0{,}5\, e^{0{,}5t} \geq 0$ équivalent à $2 \ln 2 \geq t$.

Q'(t) est positif pour t de [0 , 2 ln 2], Q'(t) est négatif pour t de [2 ln 2 , + ∞ [donc la dérivée s'annule en changeant de signe en 2 ln 2. La fonction Q admet un maximum pour t = 2 ln 2.

EXERCICE 2 (10 points)

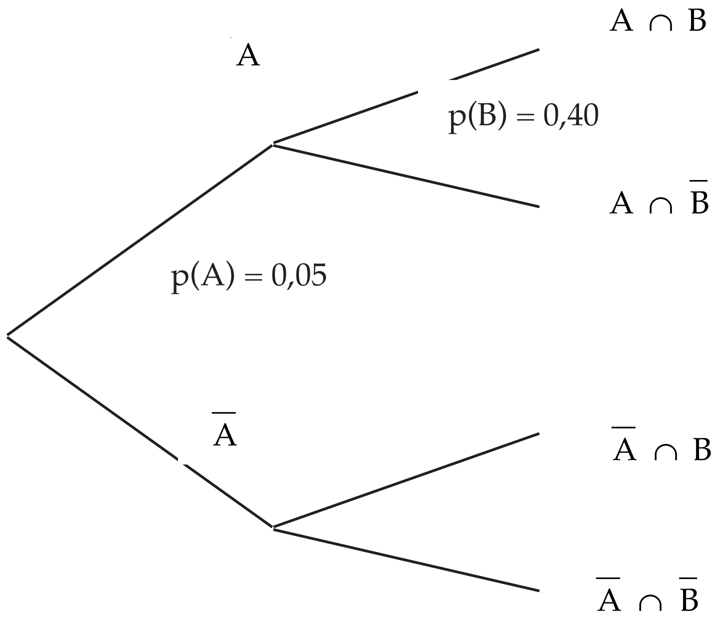
On s'intéresse, dans cet exercice , aux allergies déclenchées par deux médicaments A et B. Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques à A , et que 40% sont allergiques à B.

Partie I : En supposant que les allergies à A et B indépendantes, quelle est la probabilité qu'un individu choisi au hasard soit :

❶ – allergique à A ?❷ – allergique à B ? ❸ – allergique à A et à B ? ❹ – allergique à A ou à B ?

Solution :

En hypothèse : p(A) = 0,05 , p(B) = 0,4 .



$p(A \cap B) = p(A)p(B/A) = p(B)p(A/B)$

Puisque les évènements sont indépendants:

$p(A \cap B) = p(A)p(B)$

donc $p(A \cap B) = p(A)\,p(B) = 0,05 \,.\, 0,40 = 0,02$

Par définition :

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) =$

$p(A \cup B) = 0,05 + 0,40 - 0,02 = 0,93$

Partie II :

Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. on désigne par X le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent. on admet que X suit une loi binomiale:

Solution :

Chaque test effectué sur un individu de l'échantillon conduit à 2 échéances contradictoires : allergie A avec la probabilité p = 0,05 ou non allergie A avec la probabilité q = 1 - 0,05 = 0,95.

Les tests sont effectués au hasard sur une population de n individus et probablement de façon indépendantes (on sait pas pour quelles raisons !) car on admet que la variable aléatoire X qui prend pour valeur k le nombre d'individus allergiques à A suit la loi binomiale B (n , 0,05)

❶ – On suppose n = 10 , calculer, à 10^{-3} près, les probabilités de chacun des évènements suivants :

La variable aléatoire X qui prend pour valeur k le nombre d'individus allergiques à A suit la loi binomiale B (10 , 0,05).

E_1 : aucune analyse ne révèle l'allergie à A ; $p(E_1) = p(X = 0) = 0,599$:

E_2 : au moins 2 analyses révèlent l'allergie à A ;

$p(E_2) = p(X \geq 2) = 1 - [\, p(X = 0) + p(X = 1)\,] = 1 - 0,5987 - 0,3151 = 0,086$

❷ – On suppose maintenant $n = 100$. On admet que la loi de X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre. Calculer alors à 10^{-3} près la probabilité de l'évènement $X \leq 3$.

Puisque : $n = 100$, $p = 0{,}05$, $np=5$ on peut approcher la loi Binomiale par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 5$; $p(X \leq 3) = p(X= 0) + p(X= 1) + p(X= 2) + p(X= 3) = 0{,}0067+0{,}0336+0{,}0842+0{,}1403= 0{,}2648$