Devoir en classe n°2

Devoir 2 ; BTS 1 Analyses Biologiques ;
Année scolaire 2005/2006 ;
Le Lundi 7 Novembre 2005

❒ SITUATION 1 :

Recherche de la solution générale de l'équation homogène associée, recherche d'une solution particulière par identification, puis écrire la solution générale de l'équation par utilisation du théorème général.

EXERCICE N°1 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $2y' - y = x^2$

① – Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction f définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) ;
② – Soit (E_0) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_0) ;
③ – En déduire la solution générale de (E).
④ – Déterminer la fonction g, solution de (E), telle que $g(0) = 0$;

❒ SITUATION 2 :

Le second membre est constant. On se ramène à une équation homogène par un changement de variables.

EXERCICE N°2 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $100y' - 5y = 40$

❶ – Déterminer la solution générale de (E) ;
❷ – Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que $f(0) = 0$;

❒ SITUATION 3 :

Recherche de la solution générale de l'équation homogène associée puis recherche de la solution générale de l'équation par utilisation de la méthode dite « de variation de la constante».

EXERCICE N°3 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = e^{-x}$

① – Soit (E_0) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_0) ;
② – On pose $y = u(x)\, e^{2x}$ où u est une fonction dérivable de la variable x ; déterminer u de façon que y soit solution de (E) ;
③ – En déduire la solution générale de l'équation (E).

SOME RIGHTS RESERVED

Devoir en classe n°2

Devoir 2 ; BTS 1 Analyses Biologiques ;
Année scolaire 2005/2006 ;
Le Lundi 7 Novembre 2005

❒ SITUATION 1 :

Recherche de la solution générale de l'équation homogène associée, recherche d'une solution particulière par identification, puis écrire la solution générale de l'équation par utilisation du théorème général.

EXERCICE N°1 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + y = -x^2$

① – Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction f définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) ;
② – Soit (E_0) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_0) ;
③ – En déduire la solution générale de (E).
④ – Déterminer la fonction g, solution de (E), telle que $g(0) = 0$;

❒ SITUATION 2 :

Le second membre est constant. On se ramène à une équation homogène par un changement de variables.

EXERCICE N°2 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $10y' + 3y = 36$

❶ – Déterminer la solution générale de (E) ;
❷ – Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que $f(0) = 0$;

❒ SITUATION 2 :

Recherche de la solution générale de l'équation homogène associée puis recherche de la solution générale de l'équation par utilisation de la méthode dite « de variation de la constante».

EXERCICE N°2 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = e^x$

① – Soit (E_0) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_0) ;
② – On pose $y = u(x)\, e^{-2x}$ où u est une fonction dérivable de la variable x ; déterminer u de façon que y soit solution de (E) ;
③ – En déduire la solution générale de l'équation (E).

SOME RIGHTS RESERVED

Devoir en classe n°2

Devoir 2 ; BTS 1 Analyses Biologiques ;
Année scolaire 2005/2006 ;
Le Lundi 7 Novembre 2005

Classer les équations différentielles suivant la méthode de résolution en trois catégories :
Rechercher la solution générale de l'équation par utilisation du théorème général.
Le second membre est constant.
Recherche de la solution générale de l'équation par utilisation de la méthode dite « de variation de la constante».

(1) : $6q'(t)+q(t)=-0,003t+1,982$; $h(t)=at+b$; $q(0)=0$;

(2) : $y'(t)+0,1y(t)=1$; $y(0)=0$;

(3) : $y'+0,5y=0,5e^{-0,5t}$; $h(t)=ate^{-0,5t}$; $h(0)=0$;

(4) : $\frac{dy}{dx}+0,02y=1,0872e^{-0,02x}$; $h(x)=axe^{-0,02x}$; $y(0)=0$;

(5) : $\frac{dy}{dx}=ay$; $y(5)=8,65$; $y(3)=1,42$;

(6) : $y'=a(y-2)$; $y(0)=170$; $y(6)=9$;

(7) : $4y'+y=1200e^{-0,25x}$; $h(x)=axe^{-0,25x}$; $f(6)=0$;

(8) : $y'+y=-1,25e^{-0,5t}$; $h(t)=ke^{-0,5t}$; $f(0)=2,5$;

(9) : $y'+0,032y=0$; $f(0)=30$;

(10) : $s'(t)+0,01s(t)=0,39$; $s(0)=0,12$;

(11) : $2y'-y=x^2$; $f(x)=ax^2+bx+c$; $f(0)=0$;

(12) : $y'-2y=e^{-x}$; $f(x)=u(x)e^{2x}$; $f'(0)=0$;

(13) : $y'+0,3y=36$; $y(0)=0$;

(14) : $y'(t)+10ky(t)=2$; $y(0)=18$; $k=5\ 10^{-3}$;

SOME RIGHTS RESERVED

BTS ANALYSES BIOLOGIQUES 1994

Devoir #1 ; BTS 1 Analyses Biologiques ;
Année scolaire 2005/2006 ;
Le 3 Octobre 2005

Un médicament dosé à 5 mg de principe actif est absorbé par voie orale. Le principe actif traverse la muqueuse intestinale, passe dans le sang, puis est éliminé. On appelle Q(t) la quantité de principe actif, exprimé en mg, présente dans le sang à l'instant t ($t \geq 0$ donné en heures) et f la fonction définie pour $t \geq 0$ par la condition (C) suivante :

(C) $f(t) = Q'(t)$

Après étude on constate que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

(E) : $y' + y = -1{,}25\, e^{-0,5t}$, et quelle vérifie $f(0) = 2{,}5$

① – Résoudre l'équation différentielle (E) et en déduire l'expression de f(t) . (on pourra chercher une solution particulière de la forme $h(t) = k\, e^{-0,5t}$, k étant un réel à déterminer) ;

Solution :

f définie pour $t \geq 0$ est solution de l'équation différentielle :

(E) : $y' + y = -1{,}25\, e^{-0,5t}$, et $f(0) = 2{,}5$

Méthode n°1 (application du théorème fondamental)

① a) Résolution de (E_1) l'équation (différentielle linéaire) homogène associée :

(E_1) : $y' + y = 0$

La solution générale de l'équation (différentielle linéaire) homogène est l'ensemble des fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = g(t) = C\, e^{-t}$, C constante réelle.

☞ b) Recherche d'une solution particulière h de (E) sous la forme $h(t) = k\, e^{-0,5t}$, t réel:

Puisque $h(t) = k\, e^{-0,5t}$ donc $h'(t) = -0{,}5\, k\, e^{-0,5t}$.

h solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $h'(t) + h(t) = -1{,}25\, e^{-0,5t}$

h solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $-0{,}5\, k\, e^{-0,5t} + k\, e^{-0,5t} = -1{,}25\, e^{-0,5t}$

En divisant les deux membres par $e^{-0,5t}$ nombre strictement positif.

h solution de (E) équivalent à : $-0{,}5\, k + k = -1{,}25$

Ainsi $k = -1{,}25 / 0{,}5 = -2{,}5$

La solution particulière de l'équation (différentielle linéaire) (E) est l'ensemble des fonctions h définies sur [0 ; + ∞ [par $h(t) = -2{,}5\, e^{-0,5t}$.

☞ c) Application du théorème général :

La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_1) et d'une solution particulière de (E) : ce sont les fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = C\, e^{-t} + -2{,}5\, e^{-0,5t}$, C constante réelle.

Recherche de la solution particulière de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 2{,}5$:

$f(0) = C\, e^{0} - 2{,}5\, e^{0} = 2{,}5$ donc : $f(0) = C - 2{,}5 = 2{,}5$ donc $C = 5$.

La solution particulière de (E) est la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = 5\, e^{-t} + -2{,}5\, e^{-0,5t}$.

Méthode n°2 : méthode dite de " variation des constantes "

☞ a) Résolution de (E_1) l'équation (différentielle linéaire) homogène associée :

(E_1) : $y' + y = 0$

La solution générale de l'équation (différentielle linéaire) homogène est l'ensemble des fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = g(t) = C\, e^{-t}$, C constante réelle.

☞ b) Recherche d'une solution de (E) sous la forme $f(t) = u(t)\, e^{-t}$, t réel où u est une fonction inconnue définie et dérivable sur [0 ; + ∞ [.

Puisque $f(t) = u(t)\, e^{-t}$ donc $f'(t) = u'(t)\, e^{-t} - u(t)\, e^{-t}$.

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $f'(t) + f(t) = -1{,}25\ e^{-0,5t}$

f solution de (E) équivalent à :

pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u'(t)\ e^{-t} - u(t)\ e^{-t} + u(t)\ e^{-t} = -1{,}25\ e^{-0,5t}$

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u'(t)\ e^{-t} = -1{,}25\ e^{-0,5t}$

sachant que la quantité e^{-t} est strictement positive pour tout t réel :

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u'(t) = -1{,}25\ e^{-0,5t}\ e^{t} = -1{,}25\ e^{0,5t}$

f solution de (E) équivalent à : pour tout t de [0 ; + ∞ [; $u(t) = -\frac{1,25}{0,5}\ e^{0,5t} + k = -2{,}5\ e^{0,5t} + k$.

La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions définies sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = k\ e^{-t} - 2{,}5\ e^{-0,5t}$, k constante réelle.

Recherche de la solution particulière de (E) vérifiant la condition initiale f(0) = 2,5 :

$f(0) = k\ e^{0} - 2{,}5\ e^{0} = 2{,}5$ donc : $f(0) = k - 2{,}5 = 2{,}5$ donc k = 5.

La solution particulière de (E) est la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $y = f(t) = 5\ e^{-t} + -2{,}5\ e^{-0,5t}$.

② – Vérifier que la fonction Q définie pour tout $t \geq 0$ par $Q(t) = 5\ (\ e^{-0,5t} - e^{-t}\ )$ satisfait la condition (C) de l'énoncé : (C) $f(t) = Q'(t)$

Puisque $f(t) = 5\ e^{-t} - 2{,}5\ e^{-0,5t}$ donc ,en intégrant, $Q(t) = 5\ (\ -e^{-t}\ ) - \frac{2,5}{(-0,5)}\ e^{-0,5t} + k$

Donc : $Q(t) = 5\ (\ -e^{-t}\ ) - \frac{2,5}{(-0,5)}\ e^{-0,5t} + k = 5\ (\ -e^{-t}\ ) + 5\ e^{-0,5t} + k = 5\ (\ -e^{-t} + e^{-0,5t}\ ) + k$

Sachant que la quantité de principe actif absorbée au départ est nulle donc Q(0) = 0.

Recherche de la solution particulière de (C) vérifiant la condition initiale Q(0) = 0.

$Q(0) = 5\ (\ e^{-0} - e^{0}\ ) + k = k = 0$.

La solution particulière de (C) est la fonction définie sur [0 ; + ∞ [par $Q(t) = 5\ (\ e^{-0,5t} - e^{-t}\ )$.

③ – Etudier la fonction Q sur l'intervalle [0 , + ∞ [. On montrera que Q admet un maximum dont on précisera la valeur exacte et on calculera la limite de Q en +∞ .

☞ Etude de la fonction Q en + ∞ :

puisque $\lim_{t \to \infty} e^{-0,5t} = 0$ et que $\lim_{t \to \infty} e^{-t} = 0$ donc $\lim_{t \to \infty} Q(t) = 0$

☞ Calcul de la dérivée :

$Q'(t) = f(t) = 5\ e^{-t} + -2{,}5\ e^{-0,5t} = 5\ e^{-t}\ (\ 1 - 0{,}5\ e^{0,5t}\ )$ sachant que $5\ e^{-t}$ est strictement positif donc signe de $Q'(t)$ = signe de $(\ 1 - 0{,}5\ e^{0,5t}\ )$.

Résolution de l'inéquation : $1 - 0{,}5\ e^{0,5t} \geq 0$ pour t de [0 ; + ∞ [:

$1 - 0{,}5\ e^{0,5t} \geq 0$ équivalent à $2 - e^{0,5t} \geq 0$

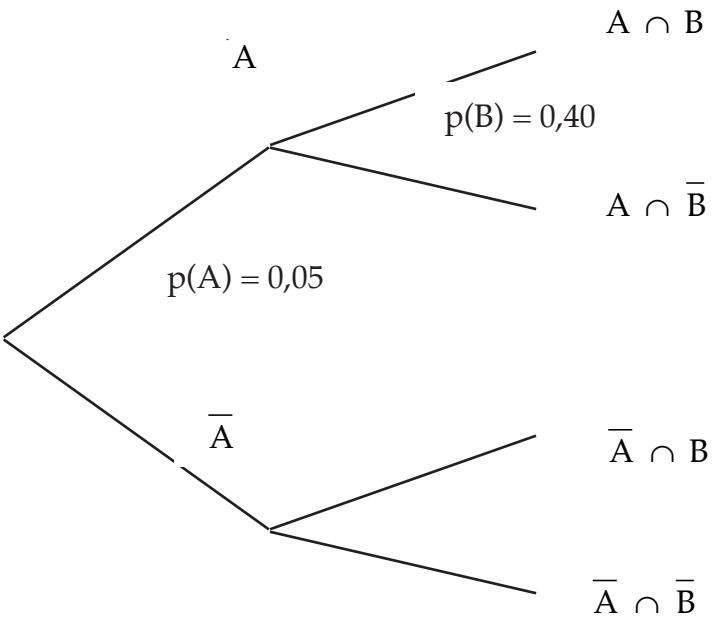
$1 - 0{,}5\ e^{0,5t} \geq 0$ équivalent à $2 \geq e^{0,5t}$

$1 - 0{,}5\ e^{0,5t} \geq 0$ équivalent à $\ln 2 \geq \ln e^{0,5t}$ (la fonction ln est strictement croissante sur [0 ; + ∞ [ )

$1 - 0{,}5\ e^{0,5t} \geq 0$ équivalent à $\ln 2 \geq 0{,}5t$

$1 - 0{,}5\ e^{0,5t} \geq 0$ équivalent à $2 \ln 2 \geq t$.

Q'(t) est positif pour t de [0 , 2 ln 2], Q'(t) est négatif pour t de [2 ln 2 , + ∞ [donc la dérivée s'annule en changeant de signe en 2 ln 2. La fonction Q admet un maximum pour t = 2 ln 2.



$$p(A \cap B) = p(A)p\left(\frac{B}{A}\right) = p(B)p\left(\frac{A}{B}\right)$$

Puisque les évènements sont indépendants:

$$p(A \cap B) = p(A)p(B)$$