

SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

EXEMPLE N°0 :

Le tableau donne le revenu brut x et l'épargne y des ménages français entre les années 1978 et 1985 (exprimés en centaines milliards francs) :

Année	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
Revenu brut x_i	16	18	20,4	23,8	27,2	29,6	31,7	33,7
Epargne brute y_i	2,8	2,9	3	3,7	4,3	4,2	4,3	4,2

1°) Nuage de points :

Représentez dans un repère orthogonal de points $M_i (x_i , y_i)$.

Sur l'axe des abscisses , on fixera l'origine à 10 et on prendra 1 cm pour 2 unités.

Sur l'axe des ordonnées on prendra 2 cm pour unité.

2°) Point moyen :

a) Calculer la moyenne de la série x_i ;

b) Calculer la moyenne de la série y_i ;

c) Placer dans le repère le point moyen du nuage de points : $G(,)$

3°) Ajustement linéaire :

a) Le nuage de points permet-il un ajustement par une droite ;

b) Cherchons deux points permettant de déterminer cette droite :

Partagez la série statistique en deux groupes de même effectif, le premier groupe correspondant aux années 1978 à 1981, le second groupe aux années 1982 à 1985. déterminez les points moyens G_1 et G_2 de ces deux groupes.

Placer ces deux points dans le repère précédent puis tracer la droite ($G_1 G_2$). Cette droite est appelée **Droite de Meyer**.

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006;

Le 21 Novembre 2005

4°) Equation de la droite ($G_1 G_2$) :

a) La droite ($G_1 G_2$) a une équation du type : $y = a x + b$;

b) Résolvez un système de deux équations à 2 inconnues pour déterminer une équation de la droite de Meyer ;

c) Vérifier que le point G appartient à ($G_1 G_2$).

5°) Application :

L'ajustement affine (ou ajustement linéaire) étant justifié, nous pouvons supposer que l'épargne brute et le revenu des ménages français sont liés par la relation fonctionnelle $y=ax+b$ trouvée à la question suivante :

a) Quelle serait l'épargne brute des ménages français si leur revenu brut s'élevait à 3 570 milliards de francs ;

b) Quel revenu brut correspond à une épargne brute de 520 milliards de francs.



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

EXEMPLE N°1 :

La tension aux bornes d'un générateur vérifie la loi : $u = E - r i$,

Grandeurs :

u est la tension en volts ; E est la force électromotrice en volts ; r est la résistance interne du générateur en ohms ; i est l'intensité en ampères.

En faisant varier un rhéostat on obtient les relevés de mesure suivant :

Intensité en Ampères	1	2	3	4	5	6
Tension en volts	36	28	22	16	10	5

1°) Nuage de points :

Représentez dans un repère orthogonal de points $M_i (x_i, y_i)$.

Sur l'axe des abscisses, on prendra 3 cm pour 1 ampère.

Sur l'axe des ordonnées on prendra 5 cm pour 10 volts.

2°) Point moyen :

a) Calculer la moyenne et l'écart-type de la série x_i ;

b) Calculer la moyenne et l'écart-type de la série y_i ;

c) Placer dans le repère le point moyen du nuage de points : $G(x, y)$

3°) Ajustement linéaire :

a) Le nuage de points permet-il un ajustement par une droite ;

b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y ;

c) Calculer une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés : droite de régression de y en x .

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006;

Le 21 Novembre 2005

FORMULAIRE :

Soit $(x_i ; y_i)$ une série statistique à deux variables x et y : on définit

① – la moyenne de x est : $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} x_i$

② – la moyenne de y : $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} y_i$

③ – La covariance de x et y :

$$\text{cov}(x, y) = \sigma_{xy} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

④ – Le coefficient de corrélation entre x et y :

$$r = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

⑤ – Une équation de la droite de régression de y en x est :

$$y - \bar{y} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma_x^2} (x - \bar{x})$$



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

EXEMPLE N°2 :

Les relevés de l'intensité du travail fourni (x_i) exprimée en KJ par minute et de la fréquence cardiaque (y_i) exprimée en nombre de battements par minute d'une personne au cours d'un test à l'effort ,

Grandeurs :

u est la tension en volts ; E est la force électromotrice en volts ; r est la résistance interne du générateur en ohms ; i est l'intensité en ampères.

En faisant varier un rhéostat on obtient les relevés de mesure suivant :

Intensité du travail en KJ (x_i)	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
Fréquence cardiaque en battements	70	86	90	104	120	128	144	154

1°) Nuage de points :

Représentez dans un repère orthogonal les points $M_i (x_i, y_i)$.

Sur l'axe des ordonnées, origine du repère en 50, on prendra 1 cm pour 10 battements.

Sur l'axe des abscisses, origine du repère en 60, on prendra 1 cm pour 4 KJ/min.

2°) Point moyen :

- Calculer la moyenne et l'écart-type de la série x_i ;
- Calculer la moyenne et l'écart-type de la série y_i ;
- Placer dans le repère le point moyen du nuage de points : $G(x, y)$

3°) Ajustement linéaire :

- Le nuage de points permet-il un ajustement par une droite ;
- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y ;
- Calculer une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés : droite de régression de y en x .
- A l'aide de cette équation exprimer la fréquence cardiaque lorsque le travail fourni est de 65 KJ / min .

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006;

Le 21 Novembre 2005

EXEMPLE N°3 :

Tous les résultats numériques seront donnés avec 3 décimales.

On a mesuré à différents instants t la tension u aux bornes d'un condensateur se déchargeant dans une résistance.

On a obtenu les résultats suivants :

Temps en secondes	30	60	90	120	150	180	210	240
Tension en volts	2,35	1,40	0,80	0,50	0,30	0,20	0,15	0,10

1°) Nuage de points :

Représentez dans un repère orthogonal les points $M_i (t_i, u_i)$.

Sur l'axe des abscisses, on prendra 1 cm pour 10 secondes.

Sur l'axe des ordonnées, on prendra 1 cm pour 0,2 volts.

Le nuage de points permet-il un ajustement par une droite? ;

2°) Nuage de points bis:

Dresser le tableau des valeurs de la série à 2 variables ($t, \ln u$) ;

On pose $y = \ln u$

Représentez dans un repère orthogonal les points $M_i (t_i, y_i)$.

Sur l'axe des abscisses, on prendra 1 cm pour 10 secondes..

Sur l'axe des ordonnées, on prendra 1 cm pour 0,2 unité.

3°) Ajustement linéaire :

On veut obtenir une droite d'ajustement de ce dernier nuage par la méthode des moindres carrés,

- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y ;
- Calculer les coordonnées du point moyen, puis une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés : droite de régression de y en x .
- A l'aide de cette équation exprimer u en fonction de t et tracer la courbe représentative de cette fonction sur le premier graphique .

SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

EXEMPLE N°4 :

On étudie la croissance d'une culture bactérienne en milieu liquide non renouvelé. Des mesures du nombre N_i de bactéries par millilitre sont effectués à divers instants t_i (i entier naturel ; $1 \leq i \leq 7$) On obtient le tableau suivant où $\ln N_i$ désigne le logarithme népérien de N_i .

Temps en mois (t_i)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$y_i = \ln N_i$	9,15	9,30	9,38	9,50	9,65	9,72	9,85

1°) Nuage de points :

Dresser le tableau des valeurs de la série à 2 variables (t , $\ln N$) ;

On pose $y = \ln N$

Représentez dans un repère orthogonal les points M_i (t_i , y_i).

Sur l'axe des abscisses, on prendra 4cm pour 1 heure.

Sur l'axe des ordonnées, on prendra 1cm pour 0,05 unité où l'on pourra se contenter des ordonnées supérieures à 9.

Déterminer le point moyen du nuage.

2°) Ajustement linéaire :

On veut obtenir une droite d'ajustement de ce nuage par la méthode des moindres carrés,

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre t et y ;

b) Calculer une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés : droite de régression de y en t où a et b seront exprimés à 0,01 près par excès.

c) Représentez dans le repère orthogonal la droite de régression.

3°) Relation entre N et t :

a) En déduire l'expression de $N(t)$ en fonction de t , puis une estimation de N pour l'instant $t=6$.

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006;

Le 21 Novembre 2005

EXEMPLE N°5 :

On considère la série statistique à deux variables (t , n) représentant la descendance d'un couple de rongeurs sur 14 mois.

On pose $y_i = \ln n_i$ pour $i \in \{0 ; 1 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12 ; 14\}$.

La notation $\ln n_i$ désigne le logarithme népérien de n_i .

Temps en mois (t_i)	0	2	4	6	8	10	12	14
Nombre de rongeurs (n_i)	2	5	16	20	40	109	200	283

1°) Nuage de points :

Dresser le tableau des valeurs de la série à 2 variables (t , $\ln n$) ;

On pose $y = \ln n$

Représentez dans un repère orthogonal les points M_i (t_i , y_i).

Sur l'axe des abscisses, on prendra 1 cm pour 1 mois.

Sur l'axe des ordonnées, on prendra 1 cm pour 0,5 unité.

2°) Ajustement linéaire :

On veut obtenir une droite d'ajustement de ce nuage par la méthode des moindres carrés,

a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre t et y ;

b) Calculer une équation de la droite d'ajustement par la méthode des moindres carrés : droite de régression de y en t .

3°) Relation entre n et t :

a) En théorie, le nombre de rongeurs n et le numéro du mois t sont liés par une relation du type : $n = A e^{Bt}$. En tenant compte de la question 2°)

b) déterminer A et B ?

b) Comparer les valeurs théoriques de n aux valeurs expérimentales ?



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006 ;
Le 21 Novembre 2005

BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°0 : épargne brute , revenu							
Epargne yi	Revenu brut xi	Epargne yi		xi*xi	yi*yi	xi*yi	Revenu brut xi	Epargne yi			
2,80	16,0	2,80		256	7,84	44,80	16	2,80			
2,90	18,0	2,90		324	8,41	52,20	18	2,90			
3,00	20,4	3,00		416,16	9,00	61,20	20,4	3,00			
3,70	23,8	3,70		566,44	13,69	88,06	23,8	3,70			
4,30	27,2	4,30		739,84	18,49	116,96	27,2	4,30			
4,20	29,6	4,20		876,16	17,64	124,32	29,6	4,20			
4,30	31,7	4,30		1004,89	18,49	136,31	31,7	4,30			
4,20	33,7	4,20		1135,69	17,64	141,54	33,7	4,20			
Total	200,40	29,40		664,90	13,90	95,67					
Moyenne :	25,05	3,68		37,40	0,39	3,61					
Ecart-type :				6,12	0,63						
Droite de régression de y en x :			y = ax + b	r =		0,941341					
	a =	0,097	b =	1,253							
BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°0 : épargne brute , revenu				Moyenne :			
	Revenu brut xi	16,0	18,0	20,4	23,8	27,2	29,6	31,7	33,7	25,050	
	Epargne yi	2,800	2,900	3,000	3,700	4,300	4,200	4,300	4,200	3,67500	
	ti*ti	256	324	416,16	566,44	739,84	876,16	1004,89	1135,69	664,898	
	yi*yi	7,840	8,410	9,000	13,690	18,490	17,640	18,490	17,640	13,900	
	yi*ti	44,80	52,20	61,20	88,06	116,96	124,32	136,31	141,54	95,674	
Droite de régression de y en x :			y = ax + b	r =		0,941341					
	a =	0,097	b =	1,253							



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006;
Le 21 Novembre 2005

BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°1 : tension et intensité						
Tension en Volts yi	Intensité en Ampères xi	Tension en Volts yi		xi*xi	yi*yi	xi*yi	Intensité en Ampères xi	Tension en Volts yi		
36,00	1	36,00		1	1296,00	36,00	1	36,00		
28,00	2	28,00		4	784,00	56,00	2	28,00		
22,00	3	22,00		9	484,00	66,00	3	22,00		
16,00	4	16,00		16	256,00	64,00	4	16,00		
10,00	5	10,00		25	100,00	50,00	5	10,00		
5,00	6	5,00		36	25,00	30,00	6	5,00		
Total	21	117,00		15,17	490,83	50,33				
Moyenne :	4	19,50		2,92	110,58	-17,92				
Ecart-type :				1,71	10,52					
Droite de régression de y en x :			y = ax + b	r=	-0,997629					
	a =	-6,143	b =	41,000						
BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°1 : tension et intensité						oy
	Intensité en Ampères xi	1	2	3	4	5	6			#
	Tension en Volts yi	36,000	28,000	22,000	16,000	10,000	5,000			#
	ti*ti	1	4	9	16	25	36			#
	yi*yi	1296,000	784,000	484,000	256,000	100,000	25,000			#
	yi*ti	36,00	56,00	66,00	64,00	50,00	30,00			#
Droite de régression de y en x :			y = ax + b	r=	-0,997629					
	a =	-6,143	b =	41,000						



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006 ;
Le 21 Novembre 2005

BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°3 : tension aux bornes d'un condensateur					
ui tension en volts	ti	xi = ln(ui)		ti*ti	yi*yi	yi*ti	Temps ti en minutes	ui tension en volts	
2,35	30	0,854		900	0,73	25,63	30	2,35	
1,40	60	0,336		3600	0,11	20,19	60	1,40	
0,80	90	-0,223		8100	0,05	-20,08	90	0,80	
0,50	120	-0,693		14400	0,48	-83,18	120	0,50	
0,30	150	-1,204		22500	1,45	-180,60	150	0,30	
0,20	180	-1,609		32400	2,59	-289,70	180	0,20	
0,15	210	-1,897		44100	3,60	-398,40	210	0,15	
0,10	240	-2,303		57600	5,30	-552,62	240	0,10	
Total	1080	-6,74		22950,00	1,79	-184,84			
Moyenne :	135	-0,84		4725,00	1,08	-71,13			
Ecart-type :				68,74	1,04				
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r=		-0,995840			
	a =	-0,015		b =	1,190				
BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004									
	ti	30	60	90	120	150	180	210	240
	xi = ln(ui)	0,854	0,336	-0,223	-0,693	-1,204	-1,609	-1,897	-2,303
	ti*ti	900	3600	8100	14400	22500	32400	44100	57600
	yi*yi	0,730	0,113	0,050	0,480	1,450	2,590	3,599	5,302
	yi*ti	25,63	20,19	-20,08	-83,18	-180,60	-289,70	-398,40	-552,62
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r=		-0,995840			
	a =	-0,015		b =	1,190				



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006;
Le 21 Novembre 2005

BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004			Ex n°4 : culture bactérienne							
In Ni logarithme du nombre de bactéries	ti temps en heures	In Ni logarithme du nombre de bactéries				ti temps en heures	In Ni logarithme du nombre de bactéries	Ni = exp(0,229t +9,163)	In Ni logarithme du nombre de bactéries	
				$x_i * x_i$	$y_i * y_i$	$x_i * y_i$				
9,15	0,0	9,15		0	83,72	0,00	0,0	9,15	9537,627082	9,16
9,30	0,5	9,30		0,25	86,49	4,65	0,5	9,30	10694,66181	9,28
9,38	1,0	9,38		1	87,98	9,38	1,0	9,38	11992,05948	9,39
9,50	1,5	9,50		2,25	90,25	14,25	1,5	9,50	13446,84789	9,51
9,65	2,0	9,65		4	93,12	19,30	2,0	9,65	15078,12052	9,62
9,72	2,5	9,72		6,25	94,48	24,30	2,5	9,72	16907,28715	9,74
9,85	3,0	9,85		9	97,02	29,55	3,0	9,85	18958,3548	9,85
Total		11	66,55		3,25	90,44	14,49			
Moyenne :		2	9,51		1,00	0,05	0,23			
Ecart-type :					1,00	0,23				
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r =		0,997375				
	a =	0,229	b =	9,163						
BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004			Ex n°4 : culture bactérienne						Moyenne :	
	ti temps en heures	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0		1,500
	In Ni logarithme du nombre de	9,150	9,300	9,380	9,500	9,650	9,720	9,850		9,50714
	ti*ti	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9		3,250 #
	yi*yi	83,723	86,490	87,984	90,250	93,123	94,478	97,023		90,439 #
	yi*ti	0,00	4,65	9,38	14,25	19,30	24,30	29,55		14,490 #
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r =		0,997375				
	a =	0,229	b =	9,163						



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006 ;
Le 21 Novembre 2005

BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°5 : la descendance des rongeurs						
ni nombre de rongeurs	ti	ui = ln(ni)	ti*ti	yi*yi	yi*ti	Temps ti en mois	ni nombre de rongeurs			
2,0	0	0,693	0	0,48	0,00	0	2,0			
5,0	2	1,609	4	2,59	3,22	2	5,0			
16,0	4	2,773	16	7,69	11,09	4	16,0			
20,0	6	2,996	36	8,97	17,97	6	20,0			
40,0	8	3,689	64	13,61	29,51	8	40,0			
109,0	10	4,691	100	22,01	46,91	10	109,0			
200,0	12	5,298	144	28,07	63,58	12	200,0			
283,0	14	5,645	196	31,87	79,04	14	283,0			
Total	56	27,39	70,00	14,41	31,42					
Moyenne :	7	3,42	21,00	2,69	7,44					
Ecart-type :			4,58	1,64						
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r=		0,991426				
	a =	0,355	b =	0,943						
BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°5 : la descendance des rongeurs					o	
	ti	0	2	4	6	8	10	12	14	#
	ui = ln(ni)	0,693	1,609	2,773	2,996	3,689	4,691	5,298	5,645	#
	ti*ti	0	4	16	36	64	100	144	196	#
	yi*yi	0,480	2,590	7,687	8,974	13,608	22,009	28,072	31,871	#
	yi*ti	0,00	3,22	11,09	17,97	29,51	46,91	63,58	79,04	#
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r=		0,991426				
	a =	0,355	b =	0,943						



SÉRIES STATISTIQUES À 2 VARIABLES

Td n°8 ; BTS 1 Analyses Biologiques ; Année scolaire 2005/2006;
Le 21 Novembre 2005

BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004				Ex n°6 : la larve de l'insecte Tenebrio			
pi poids	Xi	Yi = ln(pi)	ti*ti	yi*yi	yi*ti	Age Xi en mois	pi poids
7,0	1	1,946	1	3,79	1,95	1	7,0
13,0	2	2,565	4	6,58	5,13	2	13,0
25,0	3	3,219	9	10,36	9,66	3	25,0
47,0	4	3,850	16	14,82	15,40	4	47,0
88,0	5	4,477	25	20,05	22,39	5	88,0
Total	15	16,06	11,00	11,12	10,90		
Moyenne :	3	3,21	2,00	0,81	1,27		
Ecart-type :			1,41	0,90			
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r=		0,999971	
	a =	0,635	b =	1,307			
BTS 1 TD n°8 S. Stat. à 2 variables 2003/2004							Yi
Xi	1	2	3	4	5		#
Yi = ln(pi)	1,946	2,565	3,219	3,850	4,477		#
ti*ti	1	4	9	16	25		#
yi*yi	3,787	6,579	10,361	14,824	20,047		#
yi*ti	1,95	5,13	9,66	15,40	22,39		#
Droite de régression de y en x :		y = ax + b		r=		0,999971	
	a =	0,635	b =	1,307			

