

LOI BINOMIALE

EXEMPLE N°1 :

Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires.
On tire successivement et avec remise 5 boules dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues ;

❶ – Etablir la loi de probabilité de X , faire une représentation graphique (2 cm pour une unité en abscisses, 2 cm pour 0,1 unité en ordonnées) ;

❷ – Etablir la fonction de répartition de la variable aléatoire X , et représenter graphiquement cette fonction (2 cm pour une unité en abscisses, 1 cm pour 0,1 unité en ordonnées) ;

EXEMPLE N°2 :

Une urne contient 100 boules : à savoir 75 boules blanches et 25 boules noires.

On tire successivement et avec remise 5 boules dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues,

❶ – Etablir la loi de probabilité de X ;

❷ – Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X ;

❸ – Etablir la fonction de répartition de la variable aléatoire X , et représenter graphiquement cette fonction ;

Td n°3 ; BTS 1 BIO & AB ; Année scolaire 2005/2006

Le Lundi 30 Janvier 2006

EXEMPLE N°3 :

PARTIE A :

A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse M, il a été procédé à une campagne de vaccinations, 70 % des habitants de A ont été vaccinés.

Une étude statistique antérieure a révélé que 5 % des vaccinés ont été touchés à des degrés divers par la maladie, pourcentage élevé à 60% pour les non-vaccinés.

❶ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été touché par la maladie ;

❷ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été vacciné sachant qu'il a été atteint par la maladie ;

PARTIE B :

Les séquelles laissées par la maladie M sont variées, mais on admet que 2% des individus ont subi des lésions de la vue.

On réalise une enquête sur 100 anciens malades d'un secteur donné. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'individus souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon. On suppose que la population du pays est suffisamment importante pour que X suive une loi binomiale.

❶ – Montrer que l'on peut approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre . Calculer la probabilité pour qu'au cours de cette enquête, on découvre qu'il y ait au moins une personne souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon ;

❷ – On suppose désormais que la taille de la population soit N ; quel est la plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$?



LOI BINOMIALE

Td n°3 ; BTS 1 BIO & AB ; Année scolaire 2005/2006

Le Lundi 30 Janvier 2006

EXEMPLE N°4 :

Dans une population donnée 56% des familles occupent une maison individuelle . Parmi elles 78% en sont propriétaires. Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle 24% sont propriétaires de leur logement.

PARTIE A :

On choisit une famille au hasard dans la population considérée.

- ❶ – Calculer la probabilité pour qu'une famille soit propriétaire de son logement ;
- ❷ – Calculer la probabilité pour qu'une famille habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en n'est pas propriétaire ;

PARTIE B :

On interroge cinq familles au hasard. On suppose que les choix sont successifs et indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de familles propriétaires de leur logement.

- ❶ – Etablir la loi de probabilité de X (on donnera des valeurs approchées à 3 décimales) ;
- ❷ – Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X ;



LOI BINOMIALE

Td n°3 ; BTS 1 BIO & AB ; Année scolaire 2005/2006

Le Lundi 30 Janvier 2006

EXERCICE N°2 :

PARTIE A :

A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse M, il a été procédé à une campagne de vaccinations, 70 % des habitants de A ont été vaccinés.

Une étude statistique a révélé que 5 % des vaccinés ont été touché à des degrés divers par la maladie, pourcentage élevé à 60% pour les non-vaccinés.

∂ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été touché par la maladie ;

Σ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été vacciné sachant qu'il a été atteint par la maladie ;

Solution :

On note M : « habitants touchés par la maladie » ; $\bar{M}$: « habitants non touchés par la maladie » ; V : « habitants vaccinés » ; $\bar{V}$: « habitants non vaccinés » ;

En hypothèse : $p(V) = 0,7$; $p(M / V) = 0,05$; $p(M / \bar{V}) = 0,6$; on peut donc logiquement compte-tenu de ces données présenter un arbre dont le premier choix

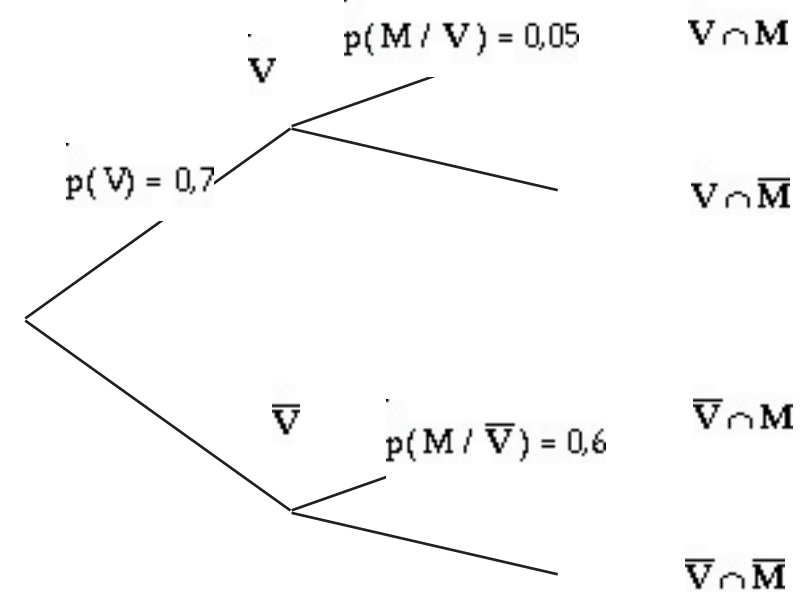
sera les deux évènements incompatibles V et $\bar{V}$: $p(V) = 1 - p(\bar{V}) = 0,3$.

∂ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été touché par la maladie ;

M : « habitants touchés par la maladie »

La formule suivante se justifie par le fait :
que l'intersection des évènements $V \cap M$ et $\bar{V} \cap M$ est vide ,
que la réunion de ces mêmes évènements est M.

Puisque les évènements sont incompatibles donc :



Σ – Calculer la probabilité $p(M) = p(V \cap M) + p(\bar{V} \cap M)$

$$p(V \cap M) = p(V) p(M / V) = 0,7 \cdot 0,05 = 0,035 ; p(\bar{V} \cap M) = p(\bar{V}) p(M / \bar{V}) = 0,3 \cdot 0,6 = 0,18$$

$$p(M) = p(V \cap M) + p(\bar{V} \cap M) = 0,035 + 0,18 = 0,215$$

$$p(V) p(M / V) = p(V \cap M) = p(M) p(V / M) = 0,035 = 0,215 p(V / M)$$

pour qu'un individu pris pas hasard ait été vacciné sachant qu'il a été atteint par la maladie ;

V / M : « habitants vaccinés sachant qu'il a été atteint par la maladie »
 $p(V / M) \approx 0,16$.

PARTIE B :

Les séquelles laissées par la maladie M sont variées, mais on admet que 2% des individus ont subi des lésions de la vue.



LOI BINOMIALE

On réalise une enquête sur 100 anciens malades d'un secteur donné. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'individus souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon. On suppose que la population du pays est suffisamment importante pour que X suive une loi binomiale.

∂ – Montrer que l'on peut approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. Calculer la probabilité pour qu'au cours de cette enquête, on découvre qu'il y ait au moins une personne souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon ;

Σ – On suppose désormais que la taille de la population soit N ; quel est la plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$?

Solution :

∂ – Montrer que l'on peut approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre. Calculer la probabilité pour qu'au cours de cette enquête, on découvre qu'il y ait au moins une personne souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon ;

Chaque test effectué sur un individu de l'échantillon conduit à 2 échéances contradictoires : lésion M avec la probabilité $p = 0,02$ ou non lésion M avec la probabilité $q = 1 - 0,02 = 0,98$.

Dire que l'effectif de la population, $n = 100$, est grand permet d'assimiler l'échantillonnage à des tirages avec remise, donc des épreuves répétées indépendantes, permet d'affirmer que la variable aléatoire X , qui prend pour valeur k le nombre de personnes atteints de lésions, suit la loi binomiale $B(100, 0,02)$.

$E(X) = 0,02 \times 100 = 2$. Puisque : $n = 100$, $p = 0,02$, $np = 2$ on peut approcher la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

E_1 : « au moins une personne souffrant de lésions » ; $p(E_1) = p(X \geq 1)$;

E_0 : « aucune personne ne souffre de lésion » ; $p(E_0) = p(X = 0)$
 $p(E_1) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,135 = 0,865$

Σ – Quel est la plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$?
Puisque X suit la loi Binomiale $p(X = 0) = 0,98^N$

Td n°3 ; BTS 1 BIO & AB ; Année scolaire 2005/2006

Le Lundi 30 Janvier 2006

Résolution de l'équation $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,98^N \geq 0,95$
 $1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $1 - 0,95 \geq 0,98^N$; $1 - 0,98^N \geq 0,95$
équivalent à $0,05 \geq 0,98^N$;

$1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $\ln 0,05 \geq N \ln 0,98$;

Puisque $\ln 0,98$ est négatif donc :

$1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $N \geq \ln 0,05 / \ln 0,98$;

$1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $N \geq 148,3$;

La plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$ est $N = 149$

