Travaux Dirigés n°2

Td n°2 ; BTS 1 BIO & AB
Année scolaire 2005/2006

Probabilités
Le 9 Janvier 2006

EXERCICE N°1 :

On sait que 35% des individus d'une population lycéenne pratiquent la natation, que 25% pratiquent le tennis et que 15 % pratiquent ces deux sports.

① – Après avoir choisi des notations judicieuses, traduisez en termes de probabilités les données de l'énoncé ;

② – On interroge au hasard une personne de la population considérée :

a) Quelle est la probabilité pour que cette personne pratique au moins un des sports considérés ?

b) Quelle est la probabilité pour que cette personne ne pratique aucun des sports considérés ?

c) Quelle est la probabilité pour que cette personne pratique la natation mais ne pratique pas le tennis ?

d) Quelle est la probabilité pour que cette personne pratique un et un seul des sports considérés ?

③ – On interroge, au hasard, une personne de la population considérée pratiquant la natation. Quelle est la probabilité que cette personne pratique le tennis ?

④ – On interroge, au hasard, une personne de la population pratiquant au moins un des sports considérés. Quelle est la probabilité que cette personne pratique à la fois la natation et le tennis ?

EXERCICE N°2 :

Dans une population la probabilité de naissance d'un garçon est 0,52. On sait que, dans cette population, 2% des filles et 1% des garçons présentent à la naissance une luxation congénitale de la hanche.

① – Après avoir choisi des notations judicieuses, traduisez en termes de probabilités les données de l'énoncé ;

② – Calculez la probabilité qu'un nouveau-né soit atteint de la luxation de la hanche ;

③ – Quelle est la probabilité qu'un nouveau-né présentant une luxation de la hanche soit une fille ;

EXERCICE N°3 :

Des enquêtes concernant les véhicules circulant en France ont montré que :

- 12% des véhicules ont des freins défectueux ;
- parmi les véhicules ayant des freins défectueux, 20 % ont un éclairage défectueux .
- parmi les véhicules ayant de bons freins, 8 % ont un éclairage défectueux .

Dans l'espoir d'améliorer la sécurité routière, la gendarmerie effectue, au hasard, des contrôles de véhicule.

① – Après avoir choisi des notations judicieuses, traduisez en termes de probabilités les données de l'énoncé ;

② – Calculez la probabilité pour qu'un véhicule contrôlé ait un éclairage défectueux ;

③ – Sachant qu'un véhicule contrôlé a un éclairage défectueux, quelle est la probabilité pour qu'il ait des freins défectueux ;

EXERCICE N°4 :

Le tiers d'une population a été vaccinée contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. On sait de plus que sur 100 personnes vaccinées, huit sont malades.

① – Pour tester l'efficacité du vaccin, comparez la probabilité d'être malade
à la probabilité d'être malade sachant que l'on a été vacciné ;

②– Quelle est la proportion de malades dans la population ?

③ – Déduisez-en la probabilité de tomber malade pour une personne non vaccinée.

EXERCICE N°11 :

On dispose de deux urnes notées U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 10 boules : 6 boules blanches numérotées et 4 boules noires numérotées .

L'urne U_2 contient 10 boules : 8 boules blanches numérotées et 2 boules noires numérotées .

On choisit, au hasard, l'une des deux urnes (il y a équiprobabilité dans le choix) , puis on extrait une boule.

❈ On note la couleur de la boule, puis on la replace dans la mêm urne mais en respectant le protocole suivant :

☞ 1er cas : Si la boule était blanche, on recommence le tirage dans la même urne.

☞ 2ème cas : Si la boule était noire, on recommence le tirage dans l'autre urne.

Cette règle est appliqué à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

NOTATIONS :

On note E_n l'événement « le n-ième tirage a lieu dans l'urne U_1 » et p_n sa probabilité; $p_n = p(E_n)$;.

On note E_n barre l'évènement contraire.

① – Traduire, à l'aide de ces notations, les données de l'énoncé ;

Calculer p_1 et p_2 ; on notera que le second tirage peut se faire dans U_2 pour deux raisons (soit que lors du premier tirage dans U_1 une boule blanche a été tirée, soit que lors du premier tirage dans U_2 une boule noire a été tirée).

② – Donner, pour tout $n \geq 1$,

les valeurs de $p\left(\frac{E_{n+1}}{E_n}\right)$ et $p\left(\frac{E_{n+1}}{\overline{E_n}}\right)$

③ – Exprimer :

les valeurs de $p\left(E_{n+1} \cap E_n\right)$ et de $p\left(E_{n+1} \cap \overline{E_n}\right)$ en fonction de $p\left(E_n\right)$

④ – En déduire que pour tout entier n supérieur à2 , on a :

$$p_{n+1} = 2/5 \ \ p_n + 1/5$$

⑤ – On pose, à présent, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_n = p_n - 1/3 \text{ et } p_n = p(E_n)$$

a) Démontrer que u_n est une suite géométrique de raison 0,2 ;

b) Calculer u_n en fonction de n ;

c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n ;

d) Montrer que p_n admet une limite que l'on calculera.

EXERCICE N°5 :

Dans une entreprise, on fait appel à un technicien lors de ses passages hebdomadaires, pour l'entretien des machines nécessitant des réglages de haute précision.

Chaque semaine, on décide donc pour chaque appareil de faire appel ou non au technicien.

Pour un certain type de machines, le technicien constate que :

- il doit systématiquement intervenir la première semaine ;
- s'il est intervenu la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité pour qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine est $^2/_5$;
- s'il n'intervient pas la $n^{\text{ième}}$ semaine, la probabilité pour qu'il intervienne la $(n+1)^{\text{ième}}$ semaine est $^1/_{20}$;

On désigne par :

- ☞ E_n l'événement « le technicien intervient la $n^{\text{ième}}$ semaine » , et par p_n la probabilité de cet événement ;
- ☞ E_n l'événement contraire.

① – Calculer en fonction de p_n la probabilité de chacun des événements ;

$$E_{n+1} \cap E_n \text{ et } E_{n+1} \cap \overline{E_n}$$

② – Déduisez-en que, pour tout entier n non nul :

$$p_{n+1} = \frac{7}{20} p_n + \frac{1}{20}$$

③ – Pour tout entier n non nul, on pose :

$$u_n = p_n - \frac{1}{13}$$

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
Précisez son premier terme et sa raison.
Calculer u_n en fonction de n.
Déduisez-en l'expression de p_n en fonction de n. ;

EXERCICE N°8 :

Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale on décide de soumettre la population menacée à des tests. D'une façon générale le résultat de chaque test est positif pour les porteurs de virus, négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes ; mais il y des exceptions.

Le but de l'exercice est de comparer deux procédures de dépistage , l'une n'utilisant qu'un test, l'autre consistant en la succession de deux tests identiques réalisés indépendamment l'un et l'autre.

On choisit un individu X au hasard et on considère les événements suivants :

- V : « X est porteur du virus » ;
- V(barre) : « X n'est pas porteur du virus » ;
- T : « le test appliqué à X est positif » ;
- T(barre) : « le test appliqué à X est négatif » ;

On admet que, en désignant par p(E) la probabilité de l'événement de E.

p(V)=0,1 ;
p(T sachant que V)=0,05 ;
p(T sachant que V(barre))=0,03.

① – Dans cette question on étudie la procédure de contrôle qui n'utilise qu'un test ;

a) Calculer la probabilité des événements :
A : « X est porteur du virus Et le test appliqué à X est positif » ;
B : « X n'est pas porteur du virus Et le test appliqué à X est positif » ;
En déduire la probabilité de T puis de T(barre).

b) Calculer la probabilité pour que X soit porteur du virus et que le test soit négatif.
En déduire la probabilité pour que Xne soit pas porteur du virus sachant que le test appliqué à X est négatif.

EXERCICE N°6 :

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB, O.

Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus.

Si le sang d'un individu possède ce facteur il est dit de Rhésus positif (noté Rh^+), s'il ne possède pas ce facteur il est dit de Rhésus négatif (noté Rh^-)

Sur une population P les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

Pour chaque groupe la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant.

Groupe	A	B	AB	O
Rh+	82%	81%	83%	80%
Rh-	18%	19%	17%	20%

U n individu ayant un sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé un ***donneur universel***.

① – ;

a) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O ?

b) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du Rhésus négatif ?

② – On choisit au hasard 5 individus de la population P et on appelle X la variable aléatoire égale au nombre de donneurs universels figurant parmi ces cinq individus. On supposera que la population P est suffisamment importante pour que la variable aléatoire suive une loi binomiale.

a) Donner la loi de probabilité de X : (résultats donnés à 10^{-4} près);

EXERCICE N°7 :

Un scrutin a été organisé pour renouveler le conseil municipal d'une ville.

Pour l'analyse des résultats, on distingue d'une part les électeurs, c'est-à-dire les personnes qui ont le droit de vote, d'autre part les votants, c'est-à-dire les personnes qui ont effectivement pris part au vote.

Le taux de participation est alors défini comme le rapport , exprimé sous forme de pourcentage

Taux de participation = nombre de votants / nombre d'électeurs

De plus, pour cette analyse du scrutin, les électeurs sont répartis en trois groupes, en fonction de leur âge :

❋ le groupe I, comprenant les électeurs de moins de 35 ans, représente 38% de l'ensemble des électeurs ;

❋ le groupe II, comprenant les électeurs de moins de 35 à 60 ans , représente 43% de l'ensemble des électeurs ;

❋ le groupe III, comprenant les électeurs de plus de 60 ans, représente 19% de l'ensemble des électeurs ;

Enfin, les taux de participation ont pu être déterminés dans chacun des groupes : 81 % dans le groupe I, 84 % dans le groupe II, 69 % dans le groupe III .

 – On choisit un électeur « M » au hasard.

Déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité pour que « M » ait voté.

Quel est le taux de participation au scrutin ?

 – On choisit au hasard un bulletin parmi les bulletins dépouillés après le scrutin.

Quelle est la probabilité pour que ce bulletin soit le bulletin d'une personne de 35 ans ou plus ?

 – Quelle est la probabilité pour que, parmi 10 personnes de plus de 60 ans, trois exactement n'aient pas voté ?

Travaux Dirigés n°2

Td n°2 ; BTS 1 BIO & AB
Année scolaire 2005/2006

Probabilités
Le 9 Janvier 2006

Exercice n°8 :

Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale on décide de soumettre la population menacée à des tests. D'une façon générale le résultat de chaque test est positif pour les porteurs de virus, négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes ; mais il y des exceptions.

Le but de l'exercice est de comparer deux procédures de dépistage , l'une n'utilisant qu'un test, l'autre consistant en la succession de deux tests identiques réalisés indépendamment l'un et l'autre.

On choisit un individu X au hasard et on considère les événements suivants :

- V : « X est porteur du virus » ;
- V : « X n'est pas porteur du virus » ;
- T : « le test appliqué à X est positif » ;
- T : « le test appliqué à X est négatif » ;

On admet que, en désignant par p(E) la probabilité de l'événement de E.

p(V)=0,1 d'où p(V)=0,9 ;
p(T sachant que V)=0,05 d'où p(T sachant que V)=0,95 ;
p(T sachant que V)=0,03.

□ – Dans cette question on étudie la procédure de contrôle qui n'utilise qu'un test ;

a) Calculer la probabilité des événements :
A : « X est porteur du virus Et le test appliqué à X est positif » ;
B : « X n'est pas porteur du virus Et le test appliqué à X est positif » ;
En déduire la probabilité de T puis de T.

b) Calculer la probabilité pour que X soit porteur du virus et que le test soit négatif.
En déduire la probabilité pour que X soit porteur du virus sachant que le test appliqué à X est négatif.

□ – On effectue maintenant deux tests identiques dans des conditions qui garantissent l'indépendance des résultats.

On considère l'événement T2 : «les résultats des deux tests appliqués à X sont négatifs »

a) Quelle est la probabilité de T2 ? Quelle est la probabilité pour que les deux tests soient négatifs sachant que X est porteur du virus ?

b) Déduire de a) la probabilité pour que X soit porteur du virus et que les deux tests soient négatifs, puis la probabilité pour que X soit porteur du virus sachant que les deux tests ont été négatifs.

Exercice n°9 : Et la Rage Prolifère

A — En notant p(A/B) la probabilité de l'événement «A sachant que B » et B l'événement contraire de B, démontrer que :

$$p(A/\overline{B}) = \frac{p(A) - p(A/B)\,p(B)}{1 - p(B)}$$

Indication : $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

B — ***Application*** **:**

Lors d'une récente saison de chasse (période durant laquelle la chasse est autorisée dans une région donnée) on a pu établir les statistiques :

- 30% des renards étaient enragés ;
- parmi les renards abattus, 40 % étaient enragés .

□ – En désignant par b (b≠1) la probabilité pour qu'un renard soit abattu lors de la saison de chasse, calculer en fonction de b la probabilité p pour qu'un renard survivant soit enragé ;

Indications :

- Dans la population des renards, on pourra désigner par A l'ensemble « renards enragés » et par B : « renards abattus pendant la saison de chasse » ;
- Durant la période considérée on négligera les autres causes de décès ainsi que les nouveaux cas de rage .

□ – Quelle est la plus petite valeur de b pour laquelle p est inférieure ou égale à 0,1?

□ – A l'issue d'une saison de chasse, la probabilité pour qu'un territoire soit décontaminé de la rage est égale à 1/3.

Une chasse est divisée en 10 territoires et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de territoires décontaminés après la saison de chasse.

Quelle est, dans les conditions précédentes, et en supposant que les résultats sont indépendants d'un territoire à l'autre, la probabilité d'avoir contaminé au moins huit territoires sur les dix à l'issue de la saison.

EXERCICE N°6 :

Pour analyser le fonctionnement d'un appareil de laboratoire, on note, mois après mois, ses pannes et on constate que :

❈ sur un mois, l'appareil tombe au plus une fois en panne ;
❈ si pendant le $n^{ième}$ mois l'appareil n'a pas de panne, la probabilité qu'il y en ait une le mois suivant, le $(n+1)^{ième}$ mois est 0,24 ;
❈ si l'appareil tombe en panne le $n^{ième}$ mois, ce qui entraîne sa révision, la probabilité pour qu'il tombe en panne le mois suivant, le probabilité pour qu'il intervienne le $(n+1)^{ième}$ mois est 0,04 ;
❈ la probabilité que l'appareil tombe en panne le premier mois après sa mise en service est 0,1 ;

On désigne par :

☞ E_n l'événement « l'appareil tombe en panne le $n^{ième}$ mois » , et par p_n la probabilité de cet événement ;
☞ E_n l'événement contraire.

□ – Traduire, à l'aide de ces notations, les données de l'énoncé ;

□ – Calculer en fonction de p_n la probabilité de chacun des événements ;

les valeurs de $p(E_{n+1} \cap E_n)$ et de $p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$ en fonction de $p(E_n)$

□ – En déduire que, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}24 - 0{,}2\ p_n$$

□ – Pour tout entier n non nul, on a :

$$u_n = p_n - 0{,}2$$

a) Calculer u_{n+1} en fonction de u_n ;
b) Calculer u_n en fonction de n ;
c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n ; calculer les valeurs approchées des premiers termes de la suite.

EXERCICE N°7 :

Un gardien de but doit faire face, lors d'une démonstration, à un certain nombre de tirs directs. Les expériences conduisent à penser que : :

❈ s'il a arrêté le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant : le (n+1)-ième tir est 0,8 ;
❈ s'il a laissé passer le n-ième tir, la probabilité pour qu'il arrête le suivant : le (n+1)-ième tir est 0,6 ;
❈ la probabilitépour qu'il arrête le premier tir est 0,7 ;

On désigne par :

☞ E_n l'événement « le gardien arrête le n-ième tir » , et par p_n la probabilité de cet événement , $p_n = p(E_n)$;
☞ E_n (barre) l'événement contraire.

□ – Traduire, à l'aide de ces notations, les données de l'énoncé ;

□ – Donner, pour tout $n \geq 1$,

les valeurs de $p\left(\frac{E_{n+1}}{E_n}\right)$ et $p\left(\frac{E_{n+1}}{\overline{E_n}}\right)$

□ – Exprimer :

□ – En déduire que pour tout entier n non nul, on a :

$$p_{n+1} = 0{,}2\ p_n + 0{,}6$$

□ – On pose, à présent, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_n = p_n - 0{,}75 \text{ et } p_n = p(A_n)$$

a) Démontrer que u_n est une suite géométrique de raison 0,2 ;

b) Calculer u_n en fonction de n ;
c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n ;
d) Montrer que p_n admet une limite que l'on calculera.

Travaux Dirigés n°2

Td n°2 ; BTS 1 BIO & AB
Année scolaire 2005/2006

Probabilités
Le 9 Janvier 2006

Exercice n°11 :

On dispose de deux urnes notées U_1 et U_2.

L'urne U_1 contient 10 boules : 6 boules blanches numérotées et 4 boules noires numérotées .

L'urne U_2 contient 10 boules : 8 boules blanches numérotées et 2 boules noires numérotées .

On choisit, au hasard, l'une des deux urnes (il y a équiprobabilité dans le choix) , puis on extrait une boule.

❈ On note la couleur de la boule, puis on la replace dans la mêm urne mais en respectant le protocole suivant :

☞ 1er cas : Si la boule était blanche, on recommence le tirage dans la même urne.

☞ 2ème cas : Si la boule était noire, on recommence le tirage dans la même urne.

Cette règle est appliqué à chaque tirage et on suppose qu'à l'intérieur de chaque urne les tirages sont équiprobables.

Notations :

On note E_n l'événement « le n-ième tirage a lieu dans l'urne U_1 » et p_n sa probabilité; $p_n = p(E_n)$;.

On note E_n barre l'évènement contraire.

□ – Traduire, à l'aide de ces notations, les données de l'énoncé ;

Calculer p_1 et p_2 ; on notera que le second tirage peut se faire dans U_2 pour deux raisons (soit que lors du premier tirage dans U_1 une boule blanche a été tirée, soit que lors du premier tirage dans U_2 une boule noire a été tirée).

□ – Donner, pour tout $n \geq 1$, les valeurs de $p\left(\frac{E_{n+1}}{E_n}\right)$ et $p\left(\frac{E_{n+1}}{\overline{E_n}}\right)$

□ – Exprimer :

les valeurs de $p(E_{n+1} \cap E_n)$ et de $p(E_{n+1} \cap \overline{E_n})$ en fonction de $p(E_n)$

□ – En déduire que pour tout entier n supérieur à2 , on a :

$$p_{n+1} = 2/5 \ \ p_n + 1/5$$

□ – On pose, à présent, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$u_n = p_n - 1/3 \text{ et } p_n = p(E_n)$$

a) Démontrer que u_n est une suite géométrique de raison 0,2

;

b) Calculer u_n en fonction de n ;

c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n ;

Exercice n°12 :

Rodolphe est distrait. Quand il part travailler, il oublie de " prendre ses papiers" ;

Quand, la veille, il a oublié de " prendre ses papiers " , il oublie à nouveau ses papiers une fois sur cinq le jour même, sinon une fois sur deux.

On note P_n l'événement « il oublie ses papiers le n-ième jour » et p_n sa probabilité.

□ Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n ;

On pose $u_n = p_n - {}^5/_{13}$

□ Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n , puis de u_1 et de n ;

□ Exprimer p_n en fonction de n ;

□ Montrer que la suite (p_n) admet une limite (${}^5/_{13}$)quand n tend vers $+\infty$.

Exercice n°10 :

Partie A :

A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse M, il a été procédé à une campagne de vaccinations, 70 % des habitants de A ont été vaccinés.

Une étude statistique a révélé que 5 % des vaccinés ont été touché à des degrés divers par la maladie, pourcentage élevé à 60% pour les non-vaccinés.

 – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été touché par la maladie ;

 – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été vacciné sachant qu'il a été atteint par la maladie ;

Partie B :

Les séquelles laissées par la maladie M sont variés, mais on admet que 2% des individus ont subi des lésions de la vue.

On réalise une enquête sur n anciens malades d'un secteur donné. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'individus souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon. On suppose que la population du pays est suffisamment importante pour que X suive une loi binomiale.

 – Calculer la probabilité pour qu'au cours de cette enquête, on découvre qu'il y ait au moins une personne souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon ;

 – Quel est la plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$?