

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES DU 1ER ORDRE ... CE QU'IL FAUT SAVOIR

I – FORME GÉNÉRALE :

Td n°1 ; BTS 1 BIO & AB ; Année scolaire 2005/2006 ; Le 28 Septembre 2005

☞ On appelle équation différentielle du 1er ordre toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = \phi(x) \quad (E)$$

où y est une fonction inconnue de la variable x ,

a une constante réelle et ϕ une fonction donnée de la variable x .

II – EQUATION HOMOGÈNE :

☞ On appelle équation différentielle homogène du 1er ordre toute équation différentielle qui peut s'écrire sous la forme :

$$y' + ay = 0 \quad (E_1)$$

* La solution générale de (E_1) est l'ensemble des fonctions définies par :

$$y = f(x) = C e^{-ax}$$

où C est une constante réelle.

III – UN CAS PARTICULIER :

☞ Si le second membre de (E) est constant :

$$y' + ay = b \quad (E)$$

b est un nombre réel

* On se ramène à une équation homogène en écrivant :

$$y' + a \left(y - \frac{b}{a} \right) = 0$$

en posant $Y = y - \frac{b}{a}$.

* La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions définies par :

$$g(x) = C e^{-ax} + \frac{b}{a}$$

où C est une constante réelle.

en posant $Y = y - \frac{b}{a}$.

IV – THÉORÈME FONDAMENTAL :

☞ Soit $(E) : y' + ay = \phi(x)$

* (E_1) l'équation homogène associée à (E) .

* SI ON CONNAÎT UNE SOLUTION PARTICULIÈRE, h , DE (E)
ALORS LA SOLUTION GÉNÉRALE DE (E) EST LA SOMME DE CETTE SOLUTION ET DE LA SOLUTION GÉNÉRALE DE (E_1) :

$$g(x) = C e^{-ax} + h(x)$$

OÙ C EST UNE CONSTANTE RÉELLE.

V – MÉTHODE GÉNÉRALE :

☞ Soit $(E) : y' + ay = \phi(x)$

* (E_1) l'équation homogène associée à (E) .

La solution générale de (E_1) est l'ensemble des fonctions f définies par :

$$y = f(x) = C e^{-ax}$$

* Pour résoudre (E) :

❶ On pose $y = u(x) e^{-ax}$ où u est une fonction inconnue de la variable x ;

❷ On calcule " y' " et on reporte dans (E) de façon à obtenir " u' " ;

❸ Les fonctions u telles que y soit solution de (E) sont les primitives de u' ;

❹ On en déduit la solution générale de (E) .