Travaux Dirigés n°1

Année scolaire 2005/2006
le 28 Septembre 2005

❒ SITUATION 1 :

Recherche d'une solution particulière par identification, puis par utilisation du théorème général.

EXERCICE N°1 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = x^2$

① – Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction f définie sur IR par $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit solution de (E) ;
② – Soit (E_1) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_1) ;
③ – En déduire la solution générale de (E).
④ – Déterminer la fonction g, solution de (E), telle que $g(0) = {}^5/_4$;

EXERCICE N°2 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $2y' + y = 3t+5$

①– Déterminer les réels a, b tels que la fonction f définie sur $[\, 0 , +\infty \,[$ par $f(t) = at + b$ soit solution de (E) ;
② – Soit (E_1) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_1) ;
③ – En déduire la solution générale de (E).
④ – Déterminer la fonction g, solution de (E), telle que $g(0) = 0$;
⑤ – Etudier sur $[\, 0 , +\infty \,[$, les variations de la fonction g et tracer sa courbe représentative (C).

EXERCICE N°3 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = 3\, e^{-t}$

①– Déterminer le réel A tel que la fonction f définie sur IR par $f(t) = A\, t\, e^{-t}$ soit solution de (E) ;
② – Soit (E_1) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_1) ;
③ – En déduire la solution générale de (E).
④ – Déterminer la fonction g, solution de (E), telle que $g(\ln 2) = 1 + {}^3/_2 \ln 2$;
⑤ – Soit ϕ la fonction définie sur $[\, 0 , +\infty \,[$, par $\phi(t) = (3t+2)\, e^{-t}$;

a) On rappelle que : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$
Etudier le sens de variation de ϕ, puis dresser son tableau de variation ;
b) Tracer sa courbe représentative.

❒ SITUATION 2 :

Le second membre est constant. On se ramène à une équation homogène par un changement de variables.

EXERCICE N°4 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + 2y = 1$

①– Déterminer la solution générale de (E) ;
② – Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que $f(0) = {}^3/_2$;
③ – Soit ϕ la fonction définie sur $I = [\, 0 , 1 \,]$, par $\phi(t) = e^{-2x} - x + {}^1/_2$;
a) Etudier les variations de ϕ ;
b) En déduire que l'équation $\phi(x) = 0$ a une , et une seule, solution dans I, notée α ;
b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près ;

❒ SITUATION 3 :

La méthode dite de " variation des constantes " est explicitée dans l'énoncé.

EXERCICE N°5 :

❋ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = e^x$

①– Soit (E_1) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_1) ;
② – On pose $y = u(x)\, e^{-x}$ où u est une fonction dérivable de la variable x ; déterminer u de façon que y soit solution de (E) ;
③ – En déduire la solution générale de l'équation (E).

EXERCICE N°6 :

❊ Soit (E) l'équation différentielle : $y' - y = 2t$

①– Soit (E_1) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_1) ;
② – Soit ϕ la fonction définie sur IR , par $\phi(t) = 2t\,e^{-t}$, déterminer les réels a et b tels que la fonction Φ définie sur IR , par $\Phi(t) = (at+b)\,e^{-t}$ soit une primitive de ϕ ;

③ – On pose $y = u(t)\,e^{t}$ où est une fonction inconnue de la variable t ; déterminer u de façon que y soit solution de (E) ;
④ – En déduire la solution générale de l'équation (E).

EXERCICE N°7 :

❊ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = 1+e^{-x}$ où y est une fonction inconnue de la variable x .

①– Soit (E_1) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_1) ;
② – On pose $y = u(x)\,e^{-x}$ où u est une fonction dérivable de la variable x ;
a) Déterminer u de façon que y soit solution de (E) ;
b) En déduire la solution générale de l'équation de (E) ;
c) Déterminer la fonction g , solution de (E), telle que g(0)=2.

$f(x) = 1 + (1+x)e^{-x}$ et (C) sa courbe représentative
dans un plan muni d'un repère orthogonal (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$)
où les unités graphiques sont 3 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées

③ – Soit f la fonction définie sur [0 , +∞ [par :
a) Démontrer que f est strictement décroissante sur [0 , +∞ [;
b) On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$
démontrer que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
Quelle propriété de la courbe (C) en déduisez-vous ?

c) Soit A le point de coordonnées (0,2). Ecrivez une équation de la droite (T), tangente en A à la courbe (C) ;
d) Tracez, sur le même graphique, la courbe (C), la droite (T) et la droite (Δ) d'équation y=1.

EXERCICE N°8 :

❊ Soit (E) l'équation différentielle : $2y' - y = e^{x}$ où y est une fonction inconnue de la variable x .

①– Soit (E_1) l'équation homogène associée à(E), résoudre (E_1) ;
② – On pose $y = u(x)\,e^{x/2}$ où u est une fonction dérivable de la variable x ;
a) Déterminer u de façon que y soit solution de (E) ;
b) En déduire la solution générale de l'équation de (E) ;
c) Déterminer la fonction f , solution de (E), telle que f(0)=-1.
③ – Soit ϕ la fonction définie sur IR par :

$\varphi(x) = e^{x} - 2e^{\frac{x}{2}}$ et (C) sa courbe représentative
dans un plan muni d'un repère orthonormal (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$)
où l'unité graphique est 1 cm en abscisse

a) Etudier les variations de ϕ sur IR ;
b) Tracer la courbe (C) ;
c) Résoudre, dans IR, l'inéquation $\phi(x) > 0$;
④ – Soit Φ la fonction définie sur] 2 ln2 ; + ∞ [par $\Phi(x) = \ln[\,\phi(x)\,]$:
a) Etudier les variations de Φ sur] 2 ln2 ; + ∞ [;
b) Tracer la courbe (Γ) représentative de Φ

dans un plan muni d'un repère orthonormal (O , $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$)
où les unités graphiques sont

c) Soit (Δ) la droite d'équation y = x. Démontrer que (Γ) et (Δ) sont asymptotes au voisinage de + ∞ ;

Travaux Dirigés n°1

Td n°1 ; BTS 1 BIO & A.B.
Année scolaire 2005/2006
le 28 Septembre 2005

Equations différentielles linéaires du premier ordre
Le Mercredi 28 Septembre 2005

❐ SITUATION 4 :

L'énoncé demande d'utiliser la méthode dite de " variation des constantes " sans l'expliquer.

EXERCICE N°9 :

❈ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = (2t + 1)\,e^{-t}$

① – Utiliser la méthode de variation des constantes résoudre (E) ;
② – Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que f(0)=1 ;
③ –

a) Etudier les variations de f sur $[\,0\,;+\infty\,[$;

pour tout entier naturel n $\lim\limits_{n \to +\infty} t^n e^{-t} = +\infty$

b) Tracer la courbe (C) représentative de f

dans un plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
où les unités graphiques sont 2 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées

EXERCICE N°10 :

❈ Soit (E) l'équation différentielle : $y' + y = e^{t}$

① – Utiliser la méthode de variation des constantes résoudre (E) ;
② –

a) Déterminer la fonction f, solution de (E), telle que f(0)=1 , démontrer que f est paire ;

b) Détermier la fonction g, solution de (E), telle que g(0)=0 , démontrer que g est impaire ;

③ –

a) Etudier les variations de f et g ;

b) Soit (C) et (Γ) les courbes représentatives de f et de g , démontrer que les coubes (C) et (Γ) sont asymptotes au voisinage de $+\infty$;

b) Tracer les courbes (C) et (Γ) sur le même graphique.

EXERCICE N°11 :

❈ Soit (E) l'équation différentielle : $y' - 2y = 3\,e^{-t}$

① – Montrer que la fonction f définie sur $[\,0\,;+\infty\,[$ par $f(t) = e^{2t} - e^{-t}$ est solution de (E) ;

② – Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) ;

③ – Ecrire une équation de la droite (T), tangente en O à la courbe (C), tracer (T) sur le graphique précédent.