∽ Baccalauréat ES Nouvelle-Calédonie ∾ novembre 2006

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

La courbe $(\mathscr{C}_f)$ de la figure 1 est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\ ;\ +\infty[$.

On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3\ ;\ 0)$, $B\left(-2\ ;\ e^2\right)$ et $C(0\ ;\ 3)$ sont des points de la courbe $(\mathscr{C}_f)$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$;
- la droite tangente à la courbe $(\mathscr{C}_f)$ en son point C passe par le point $D(2\ ;\ -1)$.

  On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

1. La limite de la fonction f en $+\infty$ est 1.
2. $f'(0) = -\dfrac{-1}{2}$.
3. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$, on a : $f'(x) \leqslant 0$.
4. Si la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[-4\ ;\ +\infty[$, alors la fonction F est décroissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$.
5. $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x < 15$.

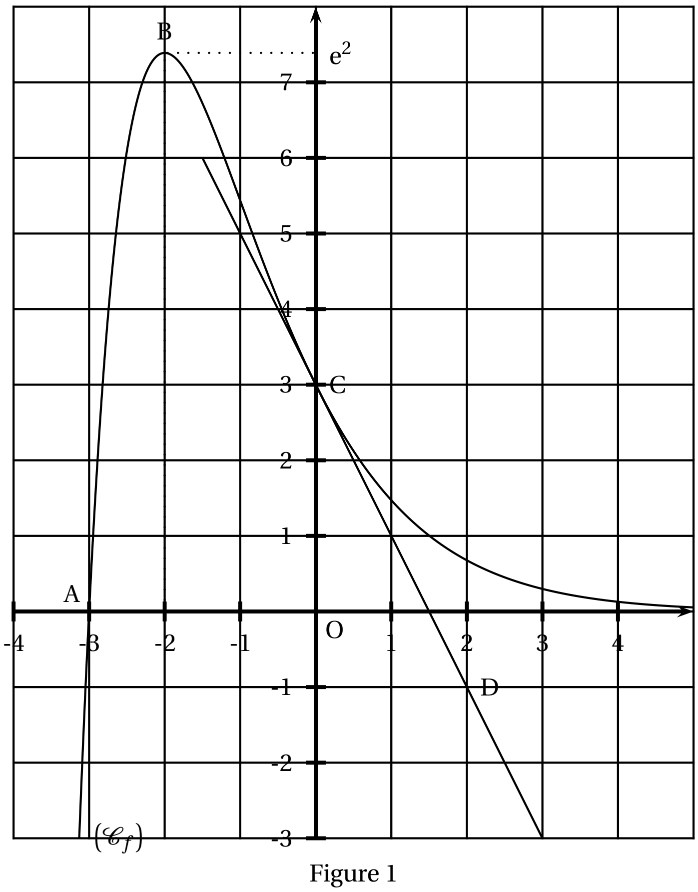

Figure 1

EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Un appareil de très haute technologie est installé dans un laboratoire d'analyse médicale. L'installateur assure une maintenance à l'issue de chaque semaine d'utilisation. Pour cette maintenance, soit il doit se déplacer (intervention directe sur l'appareil), soit une assistance téléphonique suffit.
À l'issue d'une semaine de fonctionnement, trois situations sont possibles :

- Situation A : l'appareil a fonctionné normalement ;
- Situation B : l'appareil a eu des arrêts épisodiques ;
- Situation C : l'appareil a eu des arrêts très fréquents.

Dans la situation A, l'installateur doit se déplacer 1 fois sur 2.
Dans la situation B, l'installateur doit se déplacer 7 fois sur 10.
L'installateur sait par expérience que, à l'issue de chaque semaine de fonctionnement,

- la probabilité d'être dans la situation A est $0,6$;
- la probabilité d'être dans la situation B est $0,3$;
- la probabilité qu'il doive se déplacer est $0,6$.

Partie A : L'appareil a été utilisé pendant une semaine.
On considère les évènements suivants :
A : « On se trouve dans la situation A »
B : « On se trouve dans la situation B »
C : « On se trouve dans la situation C »
S : « L'installateur se déplace »
T : « L'installateur effectue une assistance téléphonique ».
On pourra construire un arbre pondéré que l'on complétera au fur et à mesure.

1. Calculer la probabilité de l'événement T.
2. Démontrer que, lorsqu'on se trouve dans la situation C, la probabilité que l'installateur se déplace est $0,9$.
3. On sait que l'installateur s'est déplacé. Déterminer la probabilité que l'on ait été dans la situation B.

Partie B : L'installateur devra effectuer la maintenance trois semaines de suite
On admet que les évènements qui surviendront au cours de chacune de ces trois semaines sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines ?
2. **a.** Donner la loi de probabilité associée au nombre de déplacements à effectuer sur les trois semaines.

   b. Montrer que l'espérance mathématique de cette loi vaut $1,8$.

   c. Pour l'installateur, un déplacement revient à 300 € (l'assistance téléphonique ne lui coûte rien). L'installateur décide de proposer à son client un forfait pour trois semaines de maintenance.
   Déterminer le montant minimum de ce forfait afin que l'installateur puisse espérer rentrer dans ses frais.

EXERCICE 3 — 5 points

Candidats n 'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

La société MERCURE vend des machines agricoles. Suite à une restructuration en 1998 elle a pu relancer sa production et ses bénéfices annuels ont évolué comme indiqué dans le tableau suivant :

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5
Bénéfice en k€ : y_i	64	75	100	113	125	127

1. **a.** Construire le nuage de points associé à la série statistique $\left(x_i\ ;\ ; y_i\right)$ dans un repère orthogonal.
Les unités graphiques seront : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses ; 1 cm pour 10 unités sur l'axe des ordonnées.

   b. Donner les coordonnées du point moyen G du nuage (arrondir au dixième). Placer le point G dans le repère.

2. En première approximation, on envisage de représenter le bénéfice y comme une fonction affine du rang x de l'année.

   a. Donner une équation de la droite d'ajustement (D) obtenue par la méthode des moindres carrés (arrondir les coefficients au centième).

   b. Tracer cette droite (D) dans le repère.

   c. Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec cette approximation ?

3. En observant le nuage de points, on envisage un deuxième modèle d'ajustement donné par $y = f(x)$ avec $f(x) = -2x^2 + 23x + 63$.

   a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,6]$.

   b. Tracer la courbe représentative $\left(\mathscr{C}_f\right)$ de la fonction f dans le repère de la question 1.

   c. Quelle prévision ferait-on pour le bénéfice en 2005 avec ce deuxième modèle d'ajustement ?

4. En réalité, le bénéfice en 2005 est en hausse de 0,9 % par rapport à celui de 2004. Des deux ajustements envisagés dans les questions précédentes, quel est celui qui donnait la meilleure prévision pour le bénéfice en 2005 ?

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Une association sportive propose à ses adhérents de pratiquer au choix soit le karaté, soit le judo ; chaque adhérent pratique un et un seul de ces deux sports.
Chaque année les adhérents renouvellent tous leur adhésion. L'association n'accueille pas de nouveaux adhérents. Elle compte 800 adhérents.
Pour le renouvellement des adhésions, les données des années précédentes permettent d'envisager le modèle suivant :

– 70 % des adhérents qui étaient inscrits au karaté se réinscrivent au karaté,
– 20 % des adhérents qui étaient inscrits au judo s'inscrivent au karaté.

En 2003, 200 adhérents étaient inscrits dans la section karaté et 600 adhérents étaient inscrits dans la section judo.
On appelle $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice traduisant la répartition des adhérents selon le sport pratiqué l'année $2003 + n$:

- a_n représente la proportion des adhérents inscrits au karaté l'année $2003 + n$
- b_n représente la proportion des adhérents inscrits au judo l'année $2003 + n$
- $a_n + b_n = 1$.

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2. Déterminer l'état initial $P_0 = (a_0 \quad b_0)$.
3. **a.** Déterminer la matrice de transition M associée au graphe. (Rappel M est la matrice telle que : $P_{n+1} = P_n \times M$.)

b. En admettant que, en 2005, 36,25 % des adhérents sont inscrits au karaté et 63,75 % des adhérents sont inscrits au judo, déterminer la répartition que le modèle envisagé permet de prévoir pour 2006. (Exprimer les résultats sous forme de pourcentages, puis donner les nombres d'adhérents correspondants.)

4. Soit $P = (x \quad y)$ la matrice correspondant à l'état stable, c'est à dire telle que $P \times M = P$. (Rappel : x et y sont des nombres réels tels que $x + y = 1$)

a. Déterminer les nombres x et y.

b. En déduire la limite de a_n quand n tend vers l'infini.
Interpréter ce résultat.

5. Dans la même ville, un club de judo accepte de nouveaux adhérents : chaque année le nombre de ses adhérents augmente de 10 %.
Le club comptait 405 adhérents en 2003. En utilisant une calculatrice, trouver en quelle année l'effectif de ce club sera pour la première fois supérieur à l'effectif de la section judo de l'association étudiée dans les questions précédentes ?

EXERCICE 4 **6 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude préliminaire

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$

x	3	-2	$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	2

1. On note f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \ln[g(x)]$.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en (-2) et la limite de f en $+\infty$, puis donner le tableau de variations de f.

2. Soit G la primitive de la fonction g sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$ qui est telle que : $G(-2) = 0$.
Démontrer que la fonction G admet un minimum en (-2).

Partie B

Dans cette partie, la fonction g est la fonction définie sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = 2 - \dfrac{2}{x+3}$.

1. En utilisant cette définition de la fonction g retrouver tous les renseignements donnés dans le tableau de variation de la partie A.

2. Comme dans la première question de la partie A, on définit la fonction f par :

$$\text{pour tout } x \text{ élément de l'intervalle }]-2\,;\,+\infty[,\ f(x) = \ln\left(2 - \frac{2}{x+3}\right)$$

Soit $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de cette fonction f relativement à un repère orthogonal. La courbe $(\mathscr{C}_f)$ est représentée sur la figure fournie en annexe.

a. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ admet-elle des asymptotes ? Justifier.
Si oui, en donner des équations et les tracer sur la figure fournie en annexe.

b. La courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ coupe l'axe des abscisses en un point A. En utilisant l'expression de $f(x)$ déterminer les coordonnées du point A et placer ce point sur la figure fournie en annexe.

c. Déterminer une équation de la droite (T) tangente à la courbe $\left(\mathscr{C}_f\right)$ en son point d'abscisse (-1). Tracer la droite (T) sur la figure fournie en annexe.

3. Comme dans la deuxième question de la partie A, on définit la fonction G par :

G est la primitive sur l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$ de la fonction $g : x \mapsto 2-\dfrac{2}{x+3}$ et $G(-2) = 0$

Calculer $G(x)$ pour x réel de l'intervalle $]-3\,;\,+\infty[$.

ANNEXE : à compléter et à rendre avec la copie

Figure fournie pour l'exercice 4