Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°1 :

ETUDE STATISTIQUE DE LA TAILLE DES ENFANTS DE 13 À 14 ANS.

On suppose que la variable aléatoire X qui à chaque enfant associe sa taille suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Un chercheur pense, à priori, que μ est égale à 142 cm et se propose de tester cette hypothèse.

Taille des enfants (en cm)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[130 ; 135 [		1
[135 ; 140 [		4
[140 ; 145 [		7
[145 ; 150 [		10
[150 ; 155 [		8
[155 ; 160 [		3
[160 ; 165 [		2

❶ –Le chercheur prend un échantillon de 35 enfants et mesure leur taille ;

a) Calculer une valeur approchée de la moyenne notée x et de l'écart-type noté σ :

b) En déduire une estimation de μ à 10-1 près par excès notée m et une estimation de σ à 10-2 près par excès notée s :

❷ – Construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de rejetter, au seuil de risque 5% l'hypothèse selon laquelle μ=142 ; utiliser ce test avec l'échantillon précédent.

TD n°3 BTS 2											
Ex n°1	**Taille des enfants**										
Classes	ci	ni	ni.ci	ci - x = ei	ei.ei	ni ei.ei	ci.ci	ni ci.ci	f %	f cum %	f cum %
[130 ; 135 [	132,5	1	132,5	-15,29	233,65	233,6530612	17556	17556,25	2,9	2,9	100,0
[135 ; 140 [	137,5	4	550	-10,29	105,80	423,18	18906	75625	11,4	14,3	97,1
[140 ; 145 [	142,5	7	997,5	-5,29	27,94	195,57	20306	142143,75	20,0	34,3	85,7
[145 ; 150 [	147,5	10	1475	-0,29	0,08	0,82	21756	217562,5	28,6	62,9	65,7
[150 ; 155 [	152,5	8	1220	4,71	22,22	177,80	23256	186050	22,9	85,7	37,1
[155 ; 160 [	157,5	3	472,5	9,71	94,37	283,10	24806	74418,75	8,6	94,3	14,3
[160 ; 165 [	162,5	2	325	14,71	216,51	433,02	26406	52812,5	5,7	100,0	5,7
Total		35	5172,500			1747,143		766168,750			
Moyenne :			147,786			49,918		49,918			
Ecart-type :						7,065		7,065			

© ELSA Productions NANTES Septembre 2004

Reproduction interdite : loi du 11 Mars 1957 ;

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°2 :

TEST DE CONFORMITÉ DE SUPPOSITOIRES.
BTS CHIMISTE 1997.

PARTIE I :

Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine automatique fabrique en grande quantité des suppositoires contenant du paracétamol.

On désigne par X, la variable aléatoire qui, à tout suppositoire pris au hasard dans la production, associe la masse (en mg) de paracétamol qu'il contient.

On admet que X suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ=8.

X suit la loi normale $\mathcal{N}$(m , 8).

❶ – Dans cette question on suppose que m=170 ;

a) Calculer P(150 < X < 180) ;

b) Déterminer le réel α

pour que P(170 - α < X < 170 + α) = 0,85 ;

❷ – On suppose que la probabilité qu'un suppositoire, pris dans le stock, soit conforme au cahier des chargesest égale à 0,85. Le médicament est commercialisé en boîtes de 10 suppositoires.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute boîte de 10 suppositoires, associe le nombre de suppositoires conforme qu'elle contient.

a) Préciser la loi de Y et indiquer les paramètres ;

b) Calculer P(Y ≥ 9) ;

PARTIE II :

❸ – On veut contrôler la qualité de la fabrication sur une période donnée. Dans ce but, pendant le fonctionnement de la machine, on prélève de temps à autre un suppositoire dont on mesure la masse de paracétamol.

On constitue un échantillon de 100 suppositoires. Les tirages sont supposés indépendants.

A chaque échantillon ainsi constitué, on associe la masse moyenne X (barre) (en mg) de paracétamol de ses suppositoires.

masse (en mg)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[145 ; 155 [		7
[155 ; 165 [		30
[165 ; 175 [		43
[175 ; 185 [		16
[185 ; 195 [		4

On se propose de construire un test permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de signification 5%, l'hypothèse selon laquelle la masse moyenne de paracétamol contenue dans un suppositoire est égale à 170 mg.

On suppose pour hypothèse nulle H_0 : m = 170 et pour hypothèse alternative H_1 : m ≠ 170 ;

a) Sous l'hypothèse H_0 : quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

b) Enoncer clairement la règle de décision du test ;

c) Les résultats des mesures de l'échantillon prélevé sont donnés dans le tableau suivant :

Au vu de cet échantillon, peut-on accepter l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 5 % ?

TD n°3 BTS 2												
Ex n°2	**Les suppositoires**											
Classes	ci	ni	ni.ci	ci - x = ei	ei.ei	ni ei.ei	ci.ci	ni ci.ci	f %	f cum %	f cum %	
[145 ; 155 [	150	7	1050	-18,00	324,00	2268	22500	157500	7,0	7,0	100,0	
[155 ; 165 [	160	30	4800	-8,00	64,00	1920,00	25600	768000	30,0	37,0	93,0	
[165 ; 175[	170	43	7310	2,00	4,00	172,00	28900	1242700	43,0	80,0	63,0	
[175 ; 185 [	180	16	2880	12,00	144,00	2304,00	32400	518400	16,0	96,0	20,0	
[185 ; 195 [	190	4	760	22,00	484,00	1936,00	36100	144400	4,0	100,0	4,0	
Total		100	######			8600,000		#######				
Moyenne :			168,000			86,000		86,000				
Ecart-type :						9,274		9,274				
Moyenne :			168			86		86				
Ecart-type :						9 26/95		9 26/95				

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

SSTATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°3 :

PRODUCTION DE TUBES.

On étudie la production journalière d'une machine qui fabrique quotidiennement le même nombre de tubes.

PARTIE I :

❶ – On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tube sa longueur exprimée en millimètres.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne m = 1 000 et d'écart-type σ=6,08.

X suit la loi normale $\mathcal{N}$(1 000 , 6,08).

a) Déterminer le réel positif a tel que le pourcentage de tubes ayant une longueur comprise entre 1 000 - a et 1 000 + a bornes comprises soit de 90% ;

b) Un tube est déclaré défectueux si sa longueur est extérieur à l'intervalle [990 , 1 010] , calculer la probabilité p pour qu'un tube soit défectueux ;

❷ – On effectue un prélèvement avec remise de 50 tubes pris dans la production journalière. On désigne par Y la variable aléatoire associant au prélèvement le nombre de tubes défectueux. Y suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,1 :

Y suit la loi $\mathcal{B}$ (50 , 0,1).

En utilisant l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux tubes défectueux.

PARTIE II :

❸ – On prélève maintenant au hasard des échantillons de 36 tubes. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque échantillon la moyenne de la longueur des 36 tubes.

a) Sachant que X suit la loi normale $\mathcal{N}$(1 000 , 6,08), quelle la loi suivie par X ? Quels sont les paramètres de cette loi ?;

b) Déterminer le réel b positif tel que :

que P (1 000 - b < X < 1 000 + b) = 0,95 ;

Longueur des tubes (en mm)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[990 ; 994 [		3
[994 ; 998 [		7
[998 ; 1002 [		9
[1002 ; 1006 [		9
[1006 ; 1010 [		8

❹ – Un client réceptionne un lot de 500 tubes. On prélève un échantillon de 36 tubes dans ce lot. On obtient les résultats suivants :

a) En faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont celles du centre de la classe, calculer les valeurs approchées de la moyenne et de l'écart-type des 36 tubes. Donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du lot de 500 tubes ;

b) En utilisant les résultats de la question b) pour justifier votre réponse, peut-on, au vu de cet échantillon, accepter avec un risque de 5% l'hypothèse que les tubes du lot ont une longueur moyenne de 1 000 mm ?

TD n°3 BTS 2												
Ex n°3	Tubes											
Classes	ci	ni	ni.ci	ci - x = ei	ei.ei	ni ei.ei	ci.ci	ni ci.ci	f %	f cum %	f cum %	
[990 ; 994 [	992	3	2976	-9,33	87,11	261,3333333	1E+06	2952192	8,3	8,3	100,0	
[994 ; 998 [	996	7	6972	-5,33	28,44	199,11	1E+06	6944112	19,4	27,8	91,7	
998 ; 1002	1000	9	9000	-1,33	1,78	16,00	1E+06	9000000	25,0	52,8	72,2	
1002 ; 1006	1004	9	9036	2,67	7,11	64,00	1E+06	9072144	25,0	77,8	47,2	
1006 ; 1010	1008	8	8064	6,67	44,44	355,56	1E+06	8128512	22,2	100,0	22,2	
Total		36	36048,00			896,00		#######				
Moyenne :			1001,33			24,89		24,89				
Ecart-type :						4,99		4,99				
Moyenne :			#####			24 8/9		24 8/9				
Ecart-type :						4 89/90		4 89/90				

EXERCICE N°4 :

TRAITEMENT DES RIDES.

Dans une population, le pourcentage des individus présentant des rides est de 25 %.

Sur 200 personnes ayant suivi un traitement antirides, on a observé que 40personnes avaient des rides.

Au risque a=0,05, peut-on dire que le traitement est efficace ?

EXERCICE N°5 :

MALADIE DES OVINS.

On sait qu'une maladie atteint 10% des jeunes ovins d'une région donnée. Un chercheur a expérimenté un traitement sur un échantillon de n agneaux. Il a recensé alors 5% de malades.

Déterminer la valeur minimale de n qui permette au chercheur de conclure à l'efficacité du traitement au risque 5%.

© ELSA Productions NANTES Septembre 2004

Reproduction interdite : loi du 11 Mars 1957 ;

EXERCICE N°6 :

DEUX POPULATIONS DE CHEVAUX DE COURSES.

Soit deux populations de chevaux de courses : les bons sauteurs et les mauvais sauteurs.

On étudie la hauteur au garrot que l'on suppose distribuée normalement dans les deux populations. Pour cela, on prélève un échantillon dans chacune des deux populations, ce qui donne les résultats suivants :

	Effectifs	Moyennes	Ecart-types estimés
Bons sauteurs	$n_A = 55$	$m_A = 164,5$	$\sigma_A = 4,7$
Mauvais sauteurs	$n_B = 50$	$m_B = 161,5$	$\sigma_B = 5,2$

❶ – La différence entre les moyennes observées est-elle significative ?

On suppose $\alpha = 0,05$

❷ – Même question en supposant que les moyennes et les écarts type estimés sont inchangés, mais en supposant que les effectifs sont $n'_A = 12$ et $n'_B = 10$.

EXERCICE N°7 :

RÉCOLTE DES POMMES.

On étudie la taille des pommes avant et après la récolte. Pour cela, on prélève un échantillon dans chacune des deux populations, ce qui donne les résultats suivants :

	Effectifs	Moyennes	Ecart-types estimés
Avant la récolte	$n_A = 100$	$m_A = 120$ g	$\sigma_A = 20$ g
Après la récolte	$n_B = 150$	$m_B = 150$ g	$\sigma_B = 10$ g

❶ – La différence entre les moyennes observées est-elle significative ?

On suppose $\alpha = 0,05$

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°9 : (BTS ANALYSES BIOLOGIQUES 1993)

ETUDE DU TAUX DE PROTÉINES DANS LE SANG.

On s'intéresse aux effets d'une maladie M sur le taux de certaines protéines dans le sang.

PARTIE I :

Une étude antérieure a permis de montrer que ce taux X, mesuré dans une unité convenable, suit une loi normale de moyenne 130 et d'écart-type σ=5,2.

X suit la loi normale $\mathcal{N}$(130 , 5,2).

❶ – Calculer le pourcentage d'individus de la population dont le taux est compris entre 125 et 140.

PARTIE II :

Afin de mesurer les effets de la maladie M sur le taux de ces protéines, on effectue dans un premier temps un calcul de probabilité.

Dans un population de grand effectif, on a constaté que 5 % des individus sont atteints de la maladie M, 20 % ont un taux de protéines considéré comme anormal et 3 % sont atteints de la maladie M et ont un taux de protéines anormal.

Notations :

A : « individu atteint de la maladie M »

B : « individu ayant un taux de protéines anormal »

❷ – Préciser les probabilités suivantes : P(A), P(B), P(A $\cap$ B). En déduire P(A / B);

❸ – Les évènements A et B sont-ils indépendants ;

❹ – Quelle est la probabilité pour un individu d'avoir un taux de protéines anormal sachant qu'il est atteint de la maladie M ?

❺ – Quelle est la probabilité pour un individu d'être atteint de la maladie M sachant qu'il a un taux anormal de protéines ?

PARTIE III :

Dans un deuxième temps, on effectue un test statistique de comparaison des moyennes de deux échantillons. Pour cela on prélève au hasard dans la population un échantillon E_1 de 36 individus atteints de la maladie M et un échantillon E_2 de 36 individus sains.

Pour chacun de ces individus, on mesure le taux de protéines. La moyenne obtenue pour l'échantillon E_1 est 128 et la moyenne obtenue pour l'échantillon E_2 est de 131.

On admet que l'écart-type du taux de protéines dans chacune des population parentes de E_1 et de E_2 est égale à 5,2.

❻ – Au seuil de risque 5 %, peut-on considérer que la maladie M modifie le taux X de ces protéines

Travaux Dirigés n°3

EXERCICE N°10 : (BTS ANALYSES BIOLOGIQUES 1993)

ETUDE DU TAUX DE CHOLESTÉROL.

Pour un groupe de 300 personnes bienportantes, on a dosé le cholestérol et obtenu les résultats suivants : où le taux de cholestérol est exprimé en cg/l et noté x.

Taux de cholestérol (en cg/l)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[80 ; 120 [		7
[120 ; 160 [		54
[160 ; 200 [		110
[200 ; 240 [		72
[240 ; 280 [		46
[280 ; 320 [		8
[320 ; 360 [		3

❶ – Calculer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de la moyenne m_1 de cet échantillon et une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de l'écart-type σ_1 de cet échantillon ;

❷ – On suppose que le taux de cholestérol suit, chez les gens bien portants, une loi normale. Donner, en gardant les précisions précédentes, des estimations de la moyenne μ et de l'écart-type s du taux x chez les gens bien portants de la région considérée ;

❸ – Dans une autre région, un hôpital a obtenu pour un échantillon de 250 personnes une moyenne m_2 et un écart-type σ_2 tel que :

$m_2 = 191{,}2$ et $\sigma_2 = 45{,}2$;

On suppose que toutes les analyses effectuées sont indépendantes et que l'écart-type ne varie pas d'une population à l'autre.

Construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de rejeter l'hypothèse selon laquelle la différence des moyennes constatées entre les deux populations n'est pas significative, au seuil de risque 5%.

Utiliser ce test avec les deux échantillons précédents.

TD n°3 BTS 2											
Exn°10	Taux de cholestérol										
Classes	ci	ni	ni.ci	ci - x = ei	ei.ei	ni ei.ei	ci.ci	ni ci.ci	f %	f cum %	f cum %
[80 ; 120 [	100	7	700	-97,60	9525,76	66680,32	10000	70000	2,3	2,3	100,0
[120 ; 160 [	140	54	7560	-57,60	3317,76	179159,04	19600	1058400	18,0	20,3	97,7
[160 ; 200 [	180	110	19800	-17,60	309,76	34073,60	32400	3564000	36,7	57,0	79,7
[200; 240 [	220	72	15840	22,40	501,76	36126,72	48400	3484800	24,0	81,0	43,0
[240 ; 280 [	260	46	11960	62,40	3893,76	179112,96	67600	3109600	15,3	35,7	19,0
[280 ; 320 [	300	8	2400	102,40	10485,76	83886,08	90000	720000	2,7	38,3	3,7
[320 ; 360 [	340	3	1020	142,40	20277,76	60833,28	115600	346800	1,0	58,0	1,0
Total		300	59280,00			639872,00		12353600,00			
Moyenne :			197,60			2132,91		2132,91			
Ecart-type :						46,18		46,18			

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°11 :

ETUDE STATISTIQUE DU RYTHME CARDIAQUE, AU REPOS, D'UNE POPULATION DE GRAND EFFECTIF, DE SPORTIFS DE HAUT NIVEAU.

On suppose que la variable aléatoire X, donnant le nombre de pulsations par minute d'un individu de cette population suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Un chercheur pense, à priori, que μ est égale à 45 pulsations minute et se propose de tester cette hypothèse.

❶ –Le chercheur constitue un échantillon de 100 individus, choisis au hasard, et obtient les résultats suivants ;

Nombre de pulsations (par minute)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[32 ; 36 [		1
[36 ; 40 [		8
[40 ; 44 [		16
[44 ; 48 [		32
[48 ; 52 [		25
[52 ; 56 [		12
[56 ; 60 [		6

a) Calculez une valeur approchée à 10^{-1} par excès de la moyenne notée x et à 10^{-2} par excès de l'écart-type noté σ_e ;

b) Déduisez-en des estimations ponctuelles à 10^{-1} près par excès de la moyenne, μ, de la population et à 10^{-2} près par excès de son écart-type σ ; ces estimations sont respectivement notées m et s .

❷ – On se propose de construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de risque 5% l'hypothèse selon laquelle μ est égal à 45 pulsations minute ; utiliser ce test avec l'échantillon précédent.

a) Soit X la variable aléatoire, qui à tout échantillon de taille 100, associe sa moyenne. Quelle la loi de probabilité de X ? ;

b) Soit (H_0) l'hypothèse à tester et (H_1) l'hypothèse contradictoire. Enoncez (H_0) et (H_1) ;

c) Enoncez la condition de rejet (H_0) au risque 5 % ;

c) Appliquer ce test à l'échantillon initial . Concluez ;

❸ – Afin d'améliorer sa connaissance de μ, le chercheur décide d'augmenter la taille de son échantillon. A partir de quel entier n_0 , un échantillon lui fournira-t-il un intervalle de confiance d'amplitude inférieure à une pulsation par minute, au seuil de confiance de 95 % ?

TD n°3 BTS 2												
Ex n°11	Nombre de pulsations par minute											
Classes	ci	ni	ni.ci	ci - x = ei	ei.ei	ni ei.ei	ci.ci	ni ci.ci	f %	f cum %	f cum %	
[32 ; 36 [	34	1	34	-13,28	176,36	176,3584	1156	1156	0,3	0,3	33,3	
[36 ; 40 [	38	8	304	-9,28	86,12	688,95	1444	11552	2,7	3,0	33,0	
[40 ; 44 [	42	16	672	-5,28	27,88	446,05	1764	28224	5,3	8,3	30,3	
[44; 48 [	46	32	1472	-1,28	1,64	52,43	2116	67712	10,7	19,0	25,0	
[48 ; 52 [	50	25	1250	2,72	7,40	184,96	2500	62500	8,3	11,3	14,3	
[52 ; 56 [	54	12	648	6,72	45,16	541,90	2916	34992	4,0	15,3	6,0	
[56 ; 60 [	58	6	348	10,72	114,92	689,51	3364	20184	2,0	10,3	2,0	
Total		100	4728,00			2780,16		226320,00				
Moyenne :			47,28			27,80		27,80				
Ecart-type :						5,27		5,27				

TD n°3 BTS BIO 2

Exn°2 Les axes de moteur électrique

Classes	ci	ni	ni.ci	ci - x = ei	ei.ei	ni ei.ei	ci.ci	ni ci.ci	f %	f cum %	f cum %
[89,7 ; 89,8 [	89,75	3	269,25	-0,24	0,06	0,175692	8055,1	24165,1875	3,0	3,0	100,0
[89,8 ; 89,9 [	89,85	14	1257,9	-0,14	0,02	0,28	8073	113022,315	14,0	17,0	97,0
[89,9 ; 90,0[	89,95	36	3238,2	-0,04	0,00	0,06	8091	291276,09	36,0	53,0	83,0
[90,0 ; 90,1 [	90,05	33	2971,65	0,06	0,00	0,11	8109	267597,0825	33,0	86,0	47,0
[90,1 ; 90,2 [	90,15	13	1171,95	0,16	0,02	0,32	8127	105651,2925	13,0	99,0	14,0
[90,2 ; 90,3 [	90,25	1	90,25	0,26	0,07	0,07	8145,1	8145,0625	1,0	100,0	1,0
Total		100	8999,200			1,024		809857,030			
Moyenne :			89,992			0,010		0,010			
Ecart-type :						0,101		0,101			
Moyenne :			90			1/98		1/98			
Ecart-type :						9/89		9/89			

Exn°1 Taille des enfants

Classes	ci	ni	ni.ci	ci - x = ei	ei.ei	ni ei.ei	ci.ci	ni ci.ci	f %	f cum %	f cum %
[130 ; 135 [	132,5	1	132,5	-15,29	233,65	233,6530612	17556	17556,25	2,9	2,9	100,0
[135 ; 140 [	137,5	4	550	-10,29	105,80	423,18	18906	75625	11,4	14,3	97,1
[140 ; 145 [	142,5	7	997,5	-5,29	27,94	195,57	20306	142143,75	20,0	34,3	85,7
[145 ; 150 [	147,5	10	1475	-0,29	0,08	0,82	21756	217562,5	28,6	62,9	65,7
[150 ; 155 [	152,5	8	1220	4,71	22,22	177,80	23256	186050	22,9	85,7	37,1
[155 ; 160 [	157,5	3	472,5	9,71	94,37	283,10	24806	74418,75	8,6	94,3	14,3
[160 ; 165 [	162,5	2	325	14,71	216,51	433,02	26406	52812,5	5,7	100,0	5,7
Total		35	5172,500			1747,143		766168,750			
Moyenne :			147,786			49,918		49,918			
Ecart-type :						7,065		7,065			
Moyenne :			147 11/14			49 45/49		49 45/49			
Ecart-type :						7 3/46		7 3/46			

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°1 :

ETUDE STATISTIQUE DE LA TAILLE DES ENFANTS DE 13 À 14 ANS.

On suppose que la variable aléatoire X qui à chaque enfant associe sa taille suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Un chercheur pense, à priori, que μ est égale à 142 cm et se propose de tester cette hypothèse.

Taille des enfants (en cm)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[130 ; 135 [		1
[135 ; 140 [		4
[140 ; 145 [		7
[145 ; 150 [		10
[150 ; 155 [		8
[155 ; 160 [		3
[160 ; 165 [		2

❶

–Le chercheur prend un échantillon de 35 enfants et mesure leur taille ;

a) Calculer une valeur approchée de la moyenne notée x et de l'écart-type noté σ :

b) En déduire une estimation de μ à 10-1 près par excès notée m et une estimation de σ à 10-2 près par excès notée s :

❷ – Construire un test bilatéral permettant d'accepter ou de rejetter, au seuil de risque 5% l'hypothèse selon laquelle μ=142 ; utiliser ce test avec l'échantillon précédent.

EXERCICE N°4 :

TRAITEMENT DES RIDES.

Dans une population, le pourcentage des individus présentant des rides est de 25 %.

Sur 200 personnes ayant suivi un traitement antirides, on a observé que 40personnes avaient des rides.

Au risque a=0,05, peut-on dire que le traitement est efficace ?

EXERCICE N°5 :

MALADIE DES OVINS.

On sait qu'une maladie atteint 10% des jeunes ovins d'une région donnée. Un chercheur a expérimenté un traitement sur un échantillon de n agneaux. Il a recensé alors 5% de malades.

Déterminer la valeur minimale de n qui permette au chercheur de conclure à l'efficacité du traitement au risque 5%.

EXERCICE N°6 :

DEUX POPULATIONS DE CHEVAUX DE COURSES.

Soit deux populations de chevaux de courses : les bons sauteurs et les mauvais sauteurs.

On étudie la hauteur au garrot que l'on suppose distribuée normalement dans les deux populations. Pour cela, on prélève un échantillon dans chacune des deux populations, ce qui donne les résultats suivants :

	Effectifs	Moyennes	Ecart-types estimés
Bons sauteurs	$n_A = 55$	$m_A = 164,5$	$\sigma_A = 4,7$
Mauvais sauteurs	$n_B = 50$	$m_B = 161,5$	$\sigma_B = 5,2$

❶ – La différence entre les moyennes observées est-elle significative ?

On suppose $\alpha = 0,05$

❷ – Même question en supposant que les moyennes et les écarts type estimés sont inchangés, mais en supposant que les effectifs sont $n'_A = 12$ et $n'_B = 10$.

EXERCICE N°2 :

TEST DE CONFORMITÉ DE SUPPOSITOIRES.
BTS CHIMISTE 1997.

PARTIE I :

Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine automatique fabrique en grande quantité des suppositoires contenant du paracétamol.

On désigne par X, la variable aléatoire qui, à tout suppositoire pris au hasard dans la production, associe la masse (en mg) de paracétamol qu'il contient.

On admet que X suit la loi normale de moyenne m et d'écart-type σ=8.

X suit la loi normale $\mathcal{N}$(m , 8).

❶ – Dans cette question on suppose que m=170 ;

a) Calculer P(150 < X < 180) ;

b) Déterminer le réel α

pour que P(170 - α < X < 170 + α) = 0,85 ;

❷ – On suppose que la probabilité qu'un suppositoire, pris dans le stock, soit conforme au cahier des chargesest égale à 0,85. Le médicament est commercialisé en boîtes de 10 suppositoires.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à toute boîte de 10 suppositoires, associe le nombre de suppositoires conforme qu'elle contient.

a) Préciser la loi de Y et indiquer les paramètres ;

b) Calculer P(Y ≥ 9) ;

PARTIE II :

❸ – On veut contrôler la qualité de la fabrication sur une période donnée. Dans ce but, pendant le fonctionnement de la machine, on prélève de temps à autre un suppositoire dont on mesure la masse de paracétamol.

On constitue un échantillon de 100 suppositoires. Les tirages sont supposés indépendants.

A chaque échantillon ainsi constitué, on associe la masse moyenne X (barre) (en mg) de paracétamol de ses suppositoires.

On se propose de construire un test permettant d'accepter ou de refuser, au seuil de signification 5%, l'hypothèse selon laquelle la masse moyenne de paracétamol contenue dans un suppositoire est égale à 170 mg.

On suppose pour hypothèse nulle H_0 : m = 170 et pour hypothèse alternative H_1 : m ≠ 170 ;

a) Sous l'hypothèse H_0 : quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

b) Enoncer clairement la règle de décision du test ;

c) Les résultats des mesures de l'échantillon prélevé sont donnés dans le tableau suivant :

masse (en mg)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[145 ; 155 [		7
[155 ; 165 [		30
[165 ; 175 [		43
[175 ; 185 [		16
[185 ; 195 [		4

Au vu de cet échantillon, peut-on accepter l'hypothèse H_0 au seuil de signification de 5 % ?

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°3 :

PRODUCTION DE TUBES.

On étudie la production journalière d'une machine qui fabrique quotidiennement le même nombre de tubes.

PARTIE I :

❶ – On définit une variable aléatoire X en associant à chaque tube sa longueur exprimée en millimètres.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne m = 1 000 et d'écart-type σ=6,08.

X suit la loi normale $\mathcal{N}$(1 000 , 6,08).

a) Déterminer le réel positif a tel que le pourcentage de tubes ayant une longueur comprise entre 1 000 - a et 1 000 + a bornes comprises soit de 90% ;

b) Un tube est déclaré défectueux si sa longueur est extérieur à l'intervalle [990 , 1 010] , calculer la probabilité p pour qu'un tube soit défectueux ;

❷ – On effectue un prélèvement avec remise de 50 tubes pris dans la production journalière. On désigne par Y la variable aléatoire associant au prélèvement le nombre de tubes défectueux. Y suit la loi binomiale de paramètres n = 50 et p = 0,1 :

Y suit la loi $\mathcal{B}$ (50 , 0,1).

En utilisant l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson, calculer la probabilité pour qu'il y ait au moins deux tubes défectueux.

PARTIE II :

❸ – On prélève maintenant au hasard des échantillons de 36 tubes. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque échantillon la moyenne de la longueur des 36 tubes.

a) Sachant que X suit la loi normale $\mathcal{N}$(1 000 , 6,08), quelle la loi suivie par X ? Quels sont les paramètres de cette loi ?;

b) Déterminer le réel b positif tel que :

que P (1 000 - b < X < 1 000 + b) = 0,95 ;

❹ – Un client réceptionne un lot de 500 tubes. On prélève un échantillon de 36 tubes dans ce lot. On obtient les résultats suivants :

Longueur des tubes (en mm)	Centres des classes x_i	Effectifs n_i
[990 ; 994 [		3
[994 ; 998 [		7
[998 ; 1002 [		9
[1002 ; 1006 [		9
[1006 ; 1010 [		8

a) En faisant l'hypothèse que les valeurs observées sont celles du centre de la classe, calculer les valeurs approchées de la moyenne et de l'écart-type des 36 tubes. Donner une estimation de la moyenne et de l'écart-type du lot de 500 tubes ;

b) En utilisant les résultats de la question b) pour justifier votre réponse, peut-on, au vu de cet échantillon, accepter avec un risque de 5% l'hypothèse que les tubes du lot ont une longueur moyenne de 1 000 mm ?

EXERCICE N°7 :

RÉCOLTE DES POMMES.

On étudie la taille des pommes avant et après la récolte. Pour cela, on prélève un échantillon dans chacune des deux populations, ce qui donne les résultats suivants :

	Effectifs	Moyennes	Ecart-types estimés
Avant la récolte	$n_A = 100$	$m_A = 120$ g	$\sigma_A = 20$ g
Après la récolte	$n_B = 150$	$m_B = 150$ g	$\sigma_B = 10$ g

❶ – La différence entre les moyennes observées est-elle significative ?

On suppose $\alpha = 0,05$

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°8 :

RÉUSSITE AU BACCALAURÉAT.

Lors de la session de juin 1997, le taux de réussite au baccalauréat a été, dans une série donnée, de 67 % au plan national.

❶ – Dans un centre A, il y a 216 reçus sur 300 candidats présents.
Les résultats de ce centre sont-ils conformes, au risque 5%, aux résultats nationaux ?

❷ – Dans un centre B, il y a 128 reçus sur 200 candidats présents.
Les résultats du centre A et du centre B sont-ils significativement différents ?

EXERCICE N°9 :

EFFICACITÉ D'UN MÉDICAMENT.

Un médicament a été expérimenté sur 200 malades divisés en deux groupes M_1 et M_2 :

❄ le groupe M_1 composé de 110 membres a absorbé le médicament étudié ;
❄ le groupe M_2 composé de 90 membres a absorbé le placébo ;

Les résultats sont les suivants : 66 malades guéris dans le groupe M_1 , 36 malades guéris dans le groupe M_2

❶ – Calculer la fréquence de guérisons et l'écart-type de ce pourcentage pour chacun des échantillons M_1 et M_2 .

❷ – En admettant que le phénomène étudié suive une loi normale, construire un test unilatéral permettant d'accepter ou de rejetter l'hypothèse de l'efficacité du médicament, au risque 5 %.

EXERCICE N°10 :

EFFICACITÉ D'UN VACCIN.

L'étude statistique d'une maladie; réalisée sur une grande échelle; a permis de montrer qu'elle atteint mortellement, chaque année, environ 400 individus sur un million.

❶ – On désigne par K la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de décès annuels dûs à cette maladie. Quelle est, sur un échantillon de taille n, la loi de probabilité de X ?
On suppose que $n \geq 30\,000$: justifier l'approximation de cette loi par une loi normale dont vous préciserez les paramètres.

Soit F la fréquence des décès annuels dûs à cette maladie dans un échantillon de taille n et p la fréquence des décès annuels dûs à cette maladie dans la population.

❷ – a) Montrer que F suit approximativement la loi normale

❷ – b) En déduire, au seuil de confiance 95 %, le nombre de décès annuels prévisibles dans un échantillon de 100 000 individus.

❸ – On expérimente un vaccin contre cette maladie sur un échantillon de 100 000 individus. Le nombre de décès constaté l'année suivante, dans cet échantillon, est de 20.
Construire un test unilatéral permettant d'accepter ou de rejetter l'hypothèse de l'efficacité duvaccin, au risque 1 %.

Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007

STATISTIQUES : Tests d'hypothèses, d'homogénéité
Test de conformité, test d'homogénéité : des moyennes, des fréquences

EXERCICE N°8 :

RÉUSSITE AU BACCALAURÉAT.

Lors de la session de juin 1997, le taux de réussite au baccalauréat a été, dans une série donnée, de 67 % au plan national.

❶ – Dans un centre A, il y a 216 reçus sur 300 candidats présents.
Les résultats de ce centre sont-ils conformes, au risque 5%, aux résultats nationaux ?

❷ – Dans un centre B, il y a 128 reçus sur 200 candidats présents.
Les résultats du centre A et du centre B sont-ils significativement différents ?

EXERCICE N°12 :

DÉFAUT DE FABRICATION DANS UNE VERRERIE.

La proportion d'objets en verre ayant au moins un défaut est inconnue.
On extrait de la production un échantillon A d'effectif 100 contenant 42 objets défectueux.

❶ – Donner un intervalle de confiance, au risque 5%, de la fréquence d'objets défectueux parmi la production de l'usine .

❷ – On extrait un deuxième échantillon de taille 150 dans le quel on prélève 54 objets défectueux.
Peut-on en conclure au risque 5% que la différences des fréquences observées dans les échantillons A et B sont significative.

EXERCICE N°13 :

EFFICACITÉ D'UN MÉDICAMENT.

Un médicament a été expérimenté sur 200 malades divisés en deux groupes M_1 et M_2 :

❄ le groupe M_1 composé de 110 membres a absorbé le médicament étudié ;
❄ le groupe M_2 composé de 90 membres a absorbé le placébo ;

Les résultats sont les suivants : 66 malades guéris dans le groupe M_1 , 36 malades guéris dans le groupe M_2

❶ – Calculer la fréquence de guérisons et l'écart-type de ce pourcentage pour chacun des échantillons M_1 et M_2 .

❷ – En admettant que le phénomène étudié suive une loi normale, construire un test unilatéral permettant d'accepter ou de rejetter l'hypothèse de l'efficacité du médicament, au risque 5 %.

Travaux Dirigés n°3

EXERCICE N°5 :

MALADIE DES OVINS.

On sait qu'une maladie atteint 10% des jeunes ovins d'une région donnée. Un chercheur a expérimenté un traitement sur un échantillon de n agneaux. Il a recensé alors 5% de malades.

Déterminer la valeur minimale de n qui permette au chercheur de conclure à l'efficacité du traitement au risque 5%.

© ELSA Productions NANTES Septembre 2004

Reproduction interdite : loi du 11 Mars 1957 ;

EXERCICE N°8 :

RÉUSSITE AU BACCALAURÉAT.

Lors de la session de juin 1997, le /=taux de réussite au baccalauréat a été, dans une série donnée, de 67 % au plan national.@❶ – Dans un centre A, il y a 216 reçus sur 300 candidats présents.

Les résultats de ce centre sont-ils conformes, au risque 5%, aux résultats nationaux ?

❷ – Dans un centre B, il y a 128 reçus sur 200 candidats présents.

Les résultats du centre A et du centre B sont-ils significativement différents ?

EXERCICE N°10 :

EFFICACITÉ D'UN VACCIN.

L'étude statistique d'une maladie; réalisée sur une grande échelle ; a permis de montrer qu'elle atteint mortellement, chaque année, environ 400 individus sur un million.

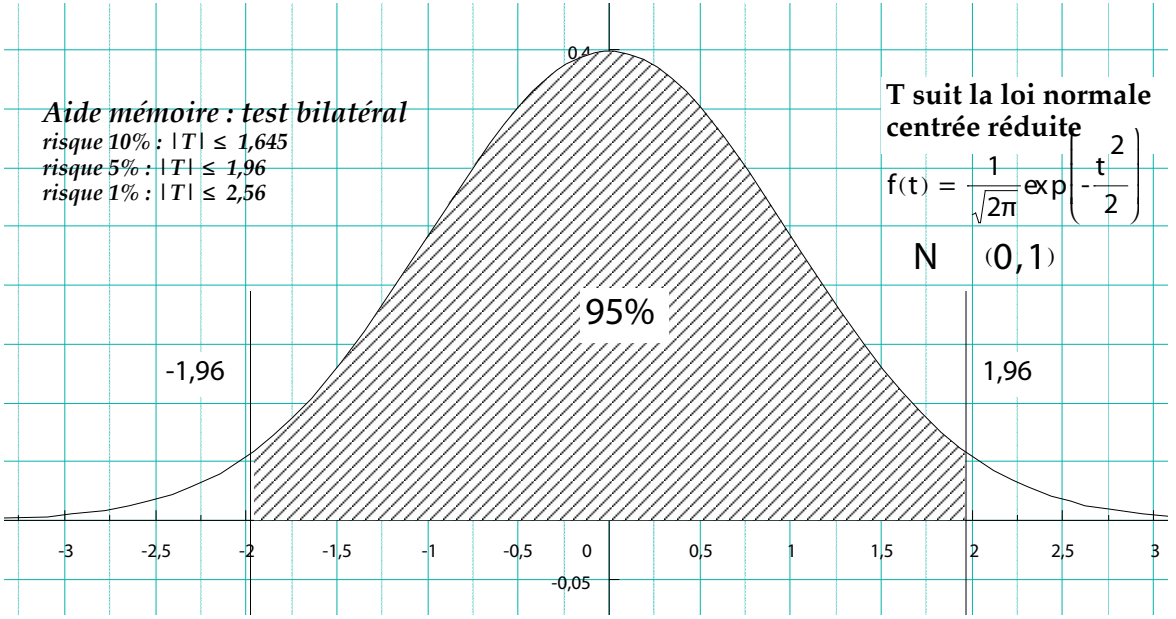
❶ – On désigne par K la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de décès annuels dûs à cette maladie. Quelle est, sur un échantillon de taille n, la loi de probabilité de X ?

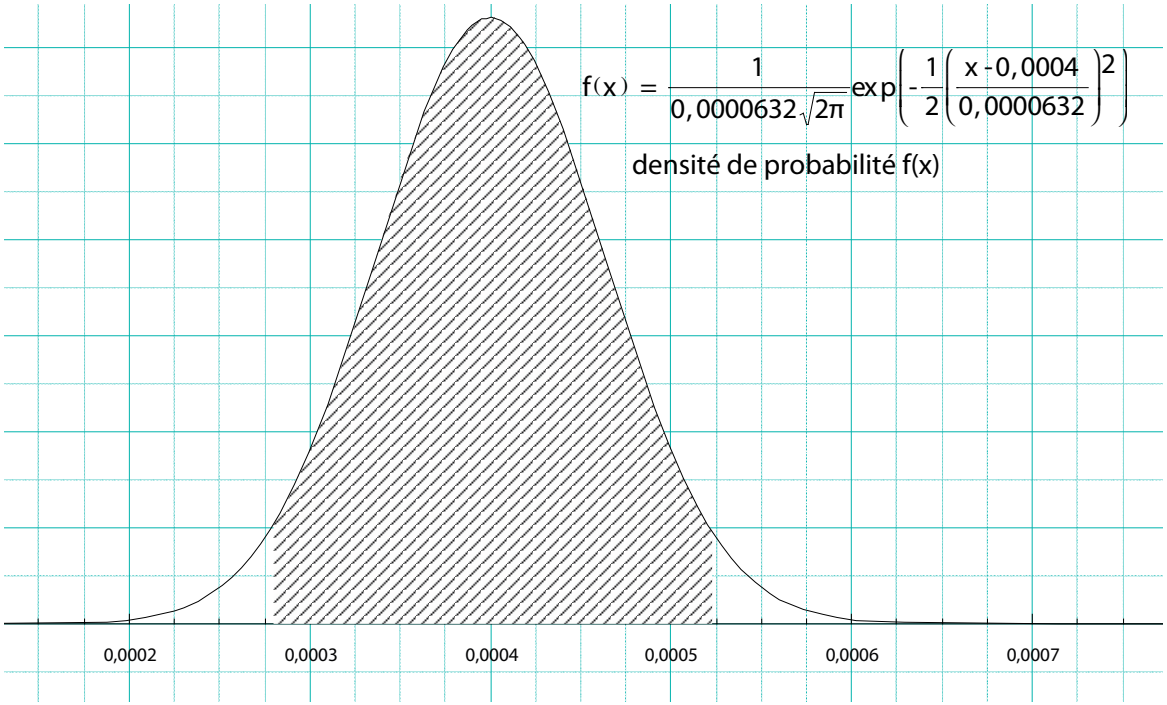
On suppose que n ≥ 30 000 : justifier l'approximation de cette loi par une loi normale dont vous préciserez les paramètres.

Soit F la fréquence des décès annuels dûs à cette maladie dans un échantillon de taille n et p la fréquence des décès annuels dûs à cette maladie dans la population.

❷ – a) Montrer que F suit approximativement la loi normale

❷ – b) En déduire, au seuil de confiance 95 %, le nombre de décès annuels prévisibles dans un échantillon de 100 000 individus.



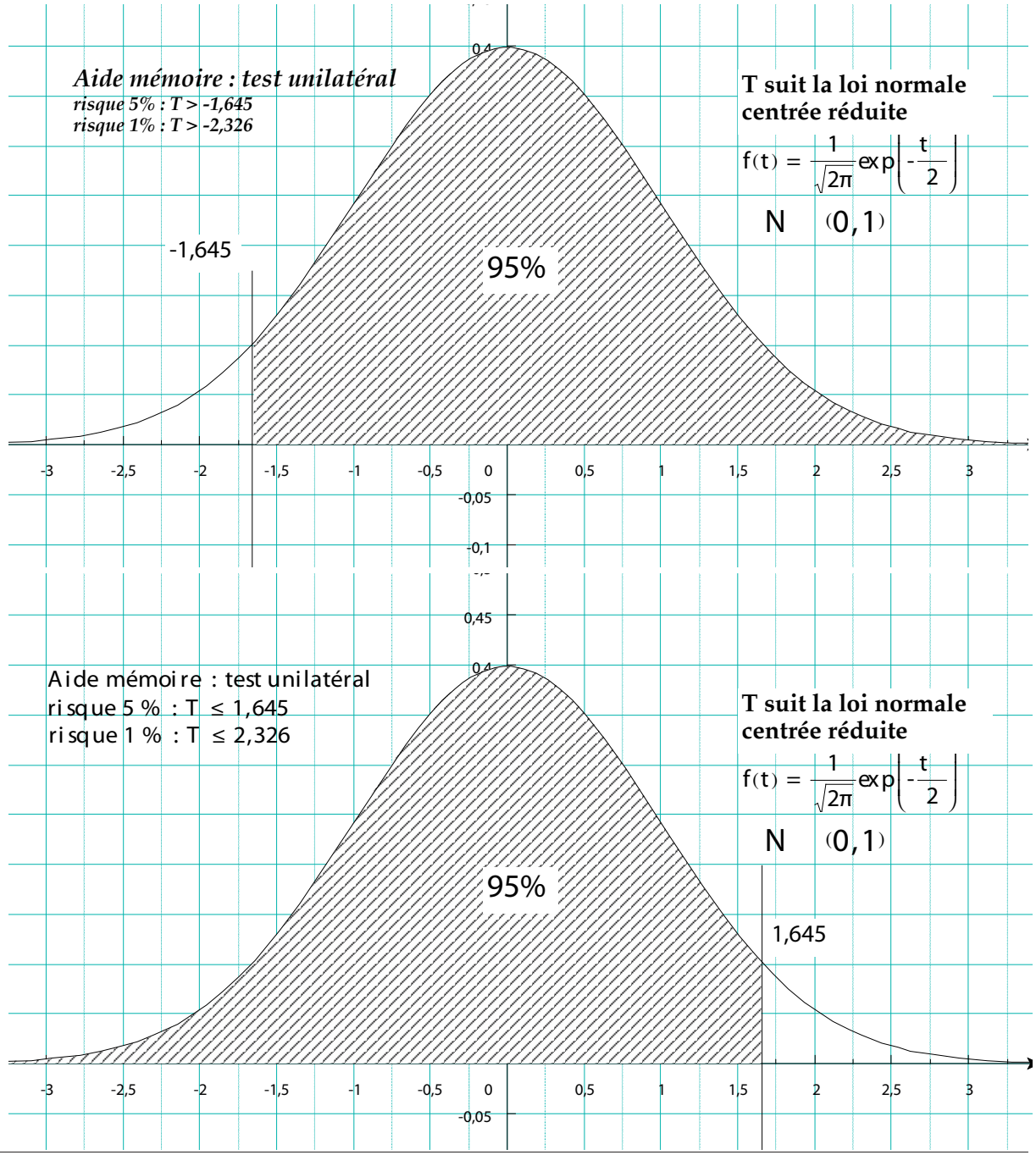


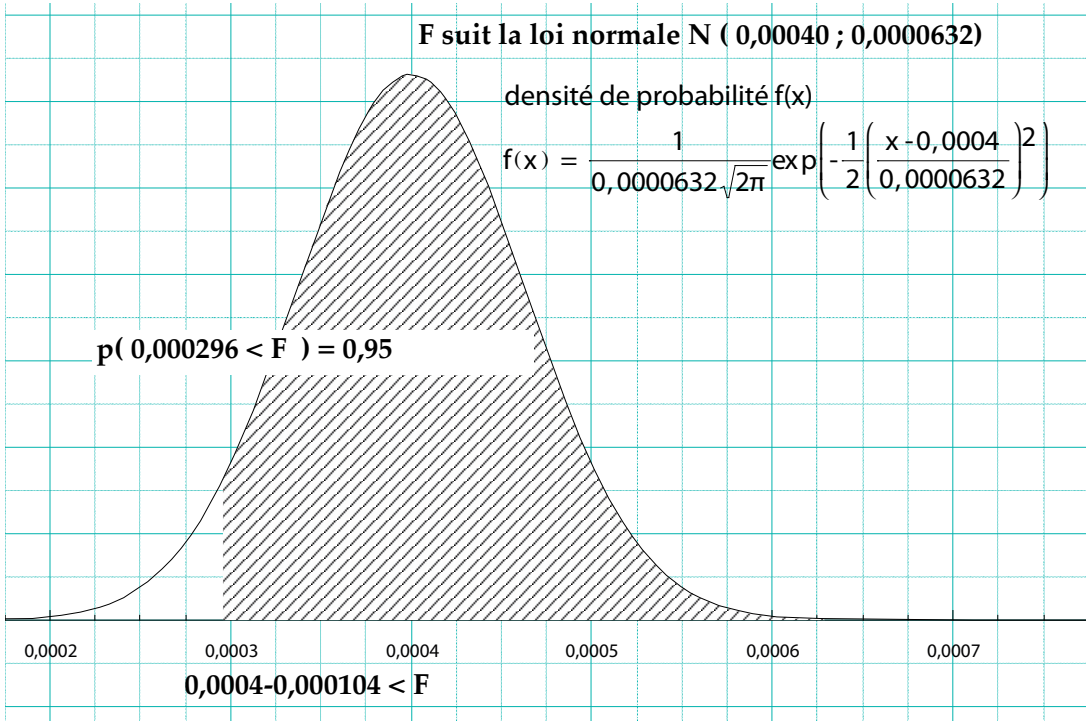
© ELSA Productions NANTES Septembre 2004

Reproduction interdite : loi du 11 Mars 1957 ;

❸ – On expérimente un vaccin contre cette maladie sur un échantillon de 100 000 individus. Le nombre de décès constaté l'année suivante, dans cet échantillon, est de 20.

Construire un test unilatéral permettant d'accepter ou de rejetter l'hypothèse de l'efficacité duvaccin, au risque 1 %.



Travaux Dirigés n°3

Td n°3 ; BTS 2 BIO & AB
Année scolaire 2006/2007