

EXERCICE 1 (10 points)

Dans cet exercice on s'intéresse à un flotteur réalisé en plastique allégé.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = -e^x$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y .

❶ Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E₀) : $y' - y = 0$.

❷ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x e^x$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

❸ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

❹ Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0)=2$.

PARTIE B. Etude d'une fonction et calcul intégral :

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = (2 - x) e^x$,

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$

où l'unité graphique est 2cm.

❶ a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[-2, 2]$.

❷ b) Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[-2, 2]$.

❸ c) Établir le tableau de variation de f sur $[-2, 2]$.

❹ Construire la courbe C sur une feuille de papier millimétré.

❺ a) Résoudre algébriquement dans $[-2, 2]$ l'inéquation $f(x) \geq 2-x$.

❻ b) Retrouver graphiquement le résultat du 3° a).

On fera apparaître sur la figure du 2° les constructions utiles.

❶ a) Démontrer que la fonction F définie sur $[-2, 2]$ par $F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4}\right)e^{2x}$

est une primitive sur $[-2, 2]$ de la fonction qui a pour expression $[f(x)]^2$.

❷ b) Application:

On considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -2$.

Le solide obtenu est utilisé pour réaliser un modèle de flotteur en plastique allégé.

On admet que le volume V , en unités de volume, du solide S est:

$$V = \pi \int_{-2}^2 [f(x)]^2 dx$$

Établir que : $V = \frac{\pi}{4} (e^4 - 41 e^{-4})$

❶ c) Donner la valeur approchée de V en cm^3 arrondie à 10^{-3} .

EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, on s'intéresse au contrôle de la qualité de la fabrication du modèle de flotteur décrit dans l'exercice 1

PARTIE A. Loi binomiale

On considère un stock important de flotteurs.

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} près.

On dit qu'un flotteur est acceptable si sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[24,5 ; 25,5]$.

On prélève au hasard un flotteur dans le stock.

On note E l'événement «le flotteur prélevé dans le stock est acceptable ».

On suppose que $P(E) = 0,26$.

On prélève au hasard n flotteurs dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de n flotteurs à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de flotteurs acceptables dans le prélèvement.

❶ Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

❷ Dans cette question, on suppose $n = 6$.

❷ a) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux flotteurs exactement soient acceptables.

❷ b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux flotteurs soient acceptables.

❸ Dans cette question, on considère un prélèvement de n flotteurs.

❸ a) Donner, en fonction de n l'expression de $P(X = 0)$.

❸ b) Soit F l'événement : « dans le prélèvement, au moins un flotteur est acceptable ». Calculer la valeur minimale n_0 de n telle que $P(F) \geq 0,95$.

PARTIE B. Loi Normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} près.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa masse exprimée en grammes. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 1,58.

❶ Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production de la journée ait une masse inférieure ou égale à 27 grammes.

❷ Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production de la journée ait une masse inférieure ou égale à 24,5 grammes.

PARTIE C. Probabilités Conditionnelles

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-4} près.

Les flotteurs sont fabriqués par deux machines notées M_1 et M_2 .

60 % des flotteurs proviennent de la machine M_1 et 40 % proviennent de la machine M_2 .

On admet que 1,3 % des flotteurs provenant de la machine M_1 sont défectueux et que 1,8 % des flotteurs provenant de la machine M_2 sont défectueux.

On prélève au hasard un flotteur dans la production d'un mois.

On considère les événements suivants :

A_1 : «le flotteur provient de la machine M_1 »;

A_2 : «le flotteur provient de la machine M_2 »;

D : « le flotteur est défectueux ».

❶ Déterminer :

$P(A_1)$, $P(A_2)$, $P(D/A_1)$ et $P(D/A_2)$.

On rappelle que $P(D/A_1) = P_{A_1}(D)$ est la probabilité de l'évènement D sachant que

l'évènement A_1 est réalisé.

❷

❷ a) Calculer les valeurs exactes des probabilités $P(D \cap A_1)$ et $P(D \cap A_2)$

❷ b) En déduire la valeur exacte de la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production du mois soit défectueux.

❸ Calculer la probabilité qu'un flotteur provienne de la machine M_1 sachant qu'il est défectueux.

EXERCICE 1 (10 points)

Dans cet exercice on s'intéresse à un flotteur réalisé en plastique allégé.

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E) : $y' - y = -e^x$

où y est une fonction de la variable réelle x , définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' la fonction dérivée de y .

☞ **x pt** ❶ Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.

Solution : (E_0) : $y' - y = 0$ (Equation différentielle linéaire sans second membre),

☞ **x,x pt** La solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = C e^x$ avec C constante réelle positive.

☞ **x pt** ❷ Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = -x e^x$. Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E)

Solution :

☞ **x,x pt** Puisque $h(x) = -x e^x$; $u(x) = -x$, $u'(x) = -1$ et $v(x) = e^x$, $v'(x) = e^x$ donc $h'(x) = u'(x) v(x) + u(x) v'(x)$ donc $h'(x) = -e^x - x e^x$;

☞ **x,x pt** Calcul de l'expression : $h'(x) - h(x)$; $h'(x) - h(x) = -e^x - x e^x - (-x e^x) = -e^x - x e^x + x e^x = -e^x$.

Puisque $h'(x) - h(x) = -e^x$, donc h est une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$.

☞ **x pt** ❸ En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

Solution :

☞ **x,x pt** La solution générale de (E) est la somme de la solution générale de (E_0) sur $\mathbb{R}$ et d'une solution particulière de (E) : ce sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y = f(x) = C e^x - x e^x$, C constante réelle.

☞ **x pt** ❹ Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale $f(0)=2$.

Solution :

Recherche de la solution particulière de (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 2$:

☞ **x,x pt** $f(0) = C e^0 - 0 e^0$ donc : $f(0) = C - 0 = 2$ donc $C = 2$.

☞ **x,x pt** La solution particulière de (E) est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y = f(x) = (2 - x) e^x$.

PARTIE B. Etude d'une fonction et calcul intégral

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = (2 - x) e^x$

☞ **x pt** ❶ a) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $[-2, 2]$

Solution :

☞ **x,x pt** $f'(x) - f(x) = -e^x$, donc $f'(x) = -e^x + f(x) = -e^x + (2 - x) e^x = (1 - x) e^x$;

☞ **x pt** ❷ b) Étudier le signe de $f'(x)$ lorsque x varie dans $[-2, 2]$.

Solution :

☞ **x,x pt** Puisque $f'(x) = (1 - x) e^x$ et que $e^x > 0$ pour tout x réel, donc signe de $f'(x) =$ signe $(1 - x)$;
si $-2 < x < 1$ alors $f'(x) > 0$; si $1 < x < 2$ alors $f'(x) < 0$;

☞ **x pt** ❸ c) Établir le tableau de variation de f sur $[-2, 2]$.

La fonction f admet un maximum pour $t = 1$.

Puisque : $f'(x) \geq 0$ pour $x \leq 1$. donc $f(x)$ est croissante pour x appartenant à $[-2, 1]$;

Puisque : $f'(x) \leq 0$ pour $x \geq 1$. donc $f(x)$ est décroissante pour x appartenant à $[1, 2]$;

Puisque la dérivée s'annule en changeant de signe pour $x = 1$, donc la fonction $f(x)$ admet un maximum pour $x = 1$

Tableau de signes de la fonction f :

☞ **pt**

x	-2	1	2
signe de $q'(t)$	positif	0	négatif
Variations de $q(t)$	$4e^{-2}$ 		

☞ **x pt** ❹ a) Résoudre algébriquement dans $[-2, 2]$ l'inéquation $f(x) \geq 2 - x$.

Solution : ☞ **x,x pt**

Résolution de l'inéquation $f(x) \geq 2 - x$ sur $[-2, 2]$: Puisque x appartient à $[-2, 2]$ donc $(2 - x) \geq 0$;

$f(x) \geq 2 - x$ équivalent à $(2 - x) e^x \geq 2 - x$; $f(x) \geq 2 - x$ équivalent à $(e^x - 1) \geq 0$;

$f(x) \geq 2 - x$ équivalent à $(2 - x) e^x - (2 - x) \geq 0$; $f(x) \geq 2 - x$ équivalent à $0 \leq x \leq 2$;

$f(x) \geq 2 - x$ équivalent à $(2 - x) (e^x - 1) \geq 0$;

☞ **x pt** ❺ b) Retrouver graphiquement le résultat du 3° a). On fera apparaître sur la figure du 2° les constructions utiles.

④ a) Démontrer que la fonction F définie sur $[-2, 2]$ est une primitive sur $[-2, 2]$ de la fonction qui a pour expression $[f(x)]^2$.
Solution : $\approx x, x$ pt

$$\text{Calcul de la dérivée de } F(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} \right) e^{2x};$$

$$\text{soit } u(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} \right), u'(x) = \left(x - \frac{5}{2} \right), v(x) = e^{2x}, v'(x) = 2e^{2x},$$

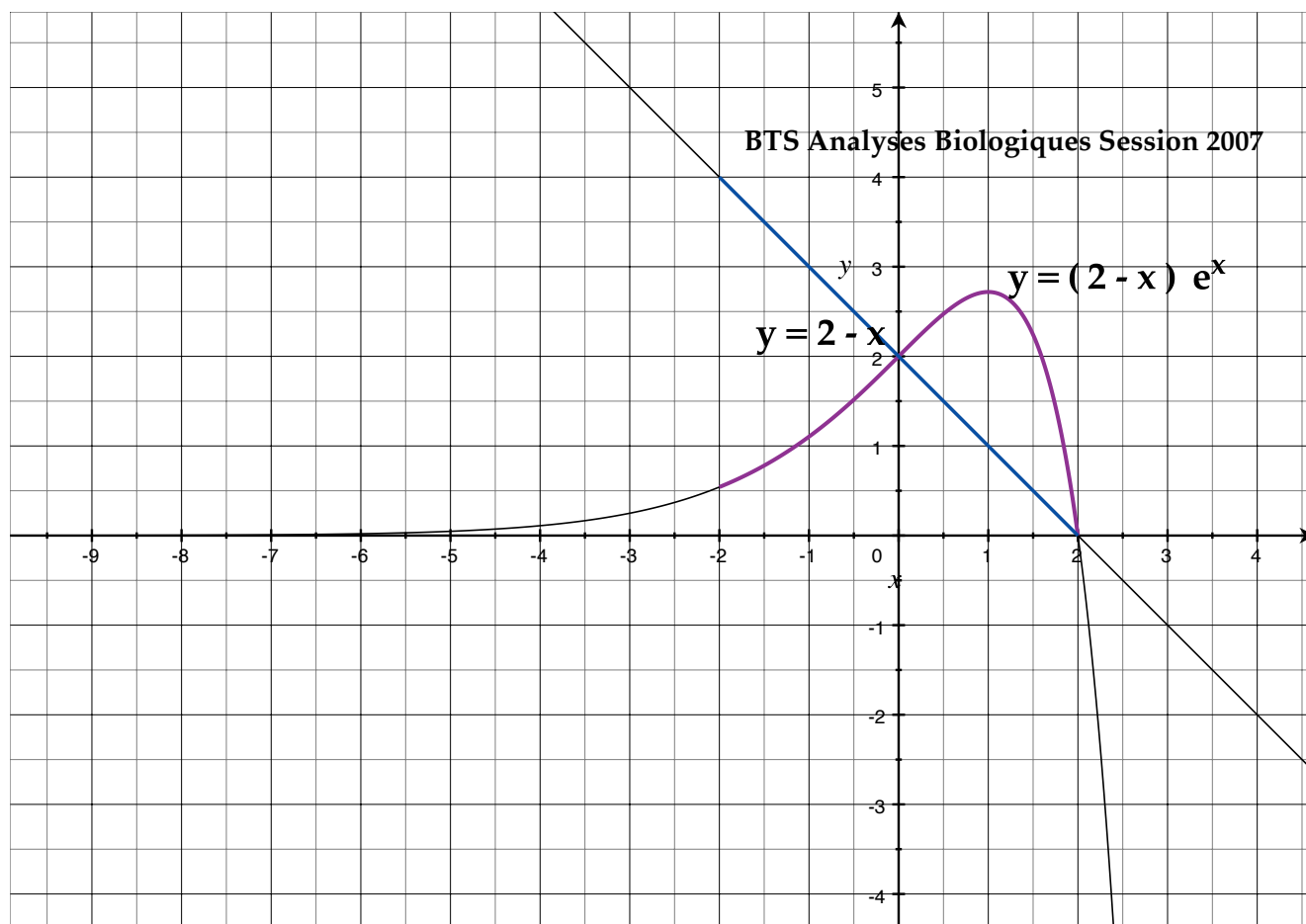
$$\text{Donc } F'(x) = \left(x - \frac{5}{2} \right) e^{2x} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} \right) 2e^{2x} = (x^2 - 4x + 4) e^{2x} = (2-x)^2 e^{2x} = [f(x)]^2$$

④ b) Application:

On considère le solide S engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la partie du plan limitée par la courbe C , l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -2$. Le solide obtenu est utilisé pour réaliser un modèle de flotteur en plastique allégé.

$\approx x$ pt

$$\text{Calcul de } V = \pi \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{13}{4} \right) e^{2x} \right]_{-2}^2 = \pi \left[\left(\frac{1}{4} \right) e^4 - \left(\frac{41}{4} \right) e^{-4} \right] = \frac{\pi}{4} (e^4 - 41 e^{-4})$$



EXERCICE 2 (10 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Dans cet exercice, on s'intéresse au contrôle de la qualité de la fabrication du modèle de flotteur décrit dans l'exercice 1

PARTIE A. Loi binomiale

On considère un stock important de flotteurs.

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} près.

On dit qu'un flotteur est acceptable si sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[24,5 ; 25,5]$.

On prélève au hasard un flotteur dans le stock.

On note E l'événement «le flotteur prélevé dans le stock est acceptable ».

On suppose que $P(E) = 0,26$.

On prélève au hasard n flotteurs dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement de n flotteurs à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement ainsi défini, associe le nombre de flotteurs acceptables dans le prélèvement.

☞ **x pt** ❶ Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

☞ **0,5 pt** **Solution :**

☞ L'expérience aléatoire qui consiste, après chaque vérification, à mesurer la masse d'un flotteur, conduit à deux issues contradictoires:

* $E(\text{barre})$: la masse du flotteur n'est pas acceptable avec la probabilité $q = 1 - p = 1 - 0,26 = 0,74$;

* E : la masse du flotteur est acceptable avec la probabilité $p = 0,26$;

On peut considérer que la taille de l'échantillon n est petite par rapport à la taille de la population, donc que les tirages se font avec remise, donc on peut considérer que les tirages sont indépendants ;

☞ Ainsi X la variable aléatoire qui, au prélèvement de n tiges, associe le nombre de tiges conformes suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ c'est à dire $\mathcal{B}(n, 0,26)$. **Les paramètres de $\mathcal{B}$ sont n et $p=0,26$.**

☞ **x pt** ❷ Dans cette question, on prend $n=6$.

a) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, deux flotteurs exactement soient acceptables.

☞ **x pt** **Solution :** Soit l'évènement : « dans le lot de 6 flotteurs 2 flotteurs sont acceptables » : ($X = 2$) ;

☞ $p(X = 2) = {}^6C_2 \cdot 0,26^2 \cdot 0,74^4 \approx 0,304 \approx \mathbf{0,30}$;

☞ **x pt** ❷ b) Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, au plus deux flotteurs soient acceptables.

☞ **x,x pt** **Solution :**

Soit l'évènement : « dans le lot de 6 flotteurs, au plus 2 flotteurs sont acceptables » : ($X \leq 2$) ;

☞ $p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) = {}^6C_0 \cdot 0,26^0 \cdot 0,74^6 + {}^6C_1 \cdot 0,26^1 \cdot 0,74^5 + {}^6C_2 \cdot 0,26^2 \cdot 0,74^4 =$
 $p(X \leq 2) = 0,164 + 0,346 + 0,304 \approx 0,814 \approx \mathbf{0,81}$;

☞ **x pt** ❸ Dans cette question, on considère un prélèvement de n flotteurs.

❸ a) Donner, en fonction de n l'expression de $P(X = 0)$.

☞ **x,x pt** **Solution :** Soit l'évènement : ($X = 0$) « dans le lot de n flotteurs, aucun flotteur n'est acceptable » :

$p(X = 0) = {}^nC_0 \cdot 0,26^0 \cdot 0,74^n = 0,74^n$

☞ **x pt** ❸ b) Soit F l'évènement : « dans le prélèvement, au moins un flotteur est acceptable ». Calculer la valeur minimale n_0 de n telle que $P(F) \geq 0,95$.

☞ **x,x pt** **Solution :**

Les événements E et F sont incompatibles donc $p(E) + p(F) = 1$; donc $p(F) = 1 - p(E) = 1 - 0,74^n$

Calcul de n_0 tel que $p(F) \geq 0,95$: $1 - 0,74^n \geq 0,95$ équivalent à $0,05 \geq 0,74^n$ équivalent à $\ln 0,05 \geq n \ln 0,74$
équivalent à $n \geq (\ln 0,05) / (\ln 0,74)$ équivalent à $n \geq 9,49$. Donc **$n_0 = 10$** .

PARTIE B. Loi Normale

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-2} près.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa masse exprimée en grammes. On suppose que la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 1,58.

☞ **x pt** ❶ Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production de la journée ait une masse inférieure ou égale à 27 grammes.

☞ **0,5 pt** **Solution :**

* Y la variable aléatoire qui, à chaque flotteur prélevé au hasard dans la production d'une journée, associe sa masse exprimée en grammes suit la loi normale de moyenne 25 et d'écart type 1,58 suit $\mathcal{N}(25, 1,58)$

Considérons la variable T définie par $T = (Y - 25)/1,58$, T suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$;

☞ **x,x pts** Calcul de $p(Y \leq 27)$:

Y suit $N(25 ; 1,58)$ équivalent à T suit $N(0 ; 1)$ et $T = \frac{Y - 25}{1,58}$

Donc : $p(Y \leq 27) = p\left(\frac{Y - 25}{1,58} \leq \frac{27 - 25}{1,58}\right) = p(T \leq 1,265)$

$p(T \leq 1,26) = 0,8962$;

$p(T \leq 1,265) = x$; $x = \frac{0,8962 + 0,8980}{2} = 0,8971$

$p(T \leq 1,27) = 0,8980$

Donc : $p(Y \leq 27) \approx 0,90$

② Calculer la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production de la journée ait une masse inférieure ou égale à 24,5 grammes.

☞ *x, x pts* Calcul de $p(Y \leq 24,5)$:

Donc : $p(Y \leq 24,5) = p\left(\frac{Y - 25}{1,58} \leq \frac{24,5 - 25}{1,58}\right) = p(T \leq -0,316) = p(T \geq 0,316) = 1 - p(T \leq 0,316)$

$p(T \leq 0,31) = 0,6217$;

$p(T \leq 0,316) = 0,6217 + x$; $\frac{x}{0,6255 - 0,6217} = \frac{0,316 - 0,31}{0,32 - 0,31}$; $\frac{x}{0,0038} = \frac{0,006}{0,01}$; $x \approx 0,0022$

$p(T \leq 0,32) = 0,6255$

Donc : $p(Y \leq 24,5) = 1 - p(T \leq 0,316) = 1 - (0,6217 + 0,0022) = 0,3761 \approx 0,37$

PARTIE C. Probabilités Conditionnelles

Dans cette partie, les résultats approchés sont à arrondir à 10^{-4} près.

Les flotteurs sont fabriqués par deux machines notées M_1 et M_2 .

60 % des flotteurs proviennent de la machine M_1 et 40 % proviennent de la machine M_2 .

On admet que 1,3 % des flotteurs provenant de la machine M_1 sont défectueux et

que 1,8 % des flotteurs provenant de la machine M_2 sont défectueux.

On prélève au hasard un flotteur dans la production d'un mois.

On considère les événements suivants :

A_1 : « le flotteur provient de la machine M_1 » ;

A_2 : « le flotteur provient de la machine M_2 » ;

D : « le flotteur est défectueux ».

① Déterminer :

☞ *x, x pt* Solution :

$P(A_1) = 0,6$; $P(A_2) = 0,4$; $P(D/A_1) = 0,013$; $P(D/A_2) = 0,018$.

②

② a) Calculer les valeurs exactes des probabilités

☞ *x, x pt* Solution :

Par définition : $P(D \cap A_1) = P(A_1) P(D/A_1) = 0,6 \cdot 0,013 = 0,0078$

$P(D \cap A_2) = P(A_2) P(D/A_2) = 0,4 \cdot 0,018 = 0,0072 \approx 0,0072$

② b) En déduire la valeur exacte de la probabilité qu'un flotteur prélevé au hasard dans la production du mois soit défectueux.

☞ *x, x pt* Solution :

Puisque les événements A_1 et A_2 sont contraires donc $P(D) = P(D \cap A_1) + P(D \cap A_2)$

$P(D) = 0,0078 + 0,0072 = 0,015$

③ Calculer la probabilité qu'un flotteur provienne de la machine M_1 sachant qu'il est défectueux.

✍ x,x pt Solution :

$P(A_1/D) = P_D(A_1)$ est la probabilité de l'évènement A_1 - provenir de la machine M_1 - sachant que l'évènement D - être défectueux - est réalisé.

Par définition : $P(D \cap A_1) = P(D) P(A_1/D)$ donc: $0,0078 = 0,0125 p(A_1/D)$

Donc : $p(A_1/D) = \frac{0,0078}{0,0125} = 0,624$

