# FONCTIONS- CONTINUITÉ - DÉRIVATION



**EXERCICE 1 ( points)**

Dans un cadre économique, on appelle fonction de satisfaction toute fonction f définie sur une partie de IR et à valeurs dans l'intervalle [ 0 ; 100 ]. On dit qu'il y a « saturation » lorsque la satisfaction est maximale, c'est à dire lorsque la fonction f prend la valeur 100:

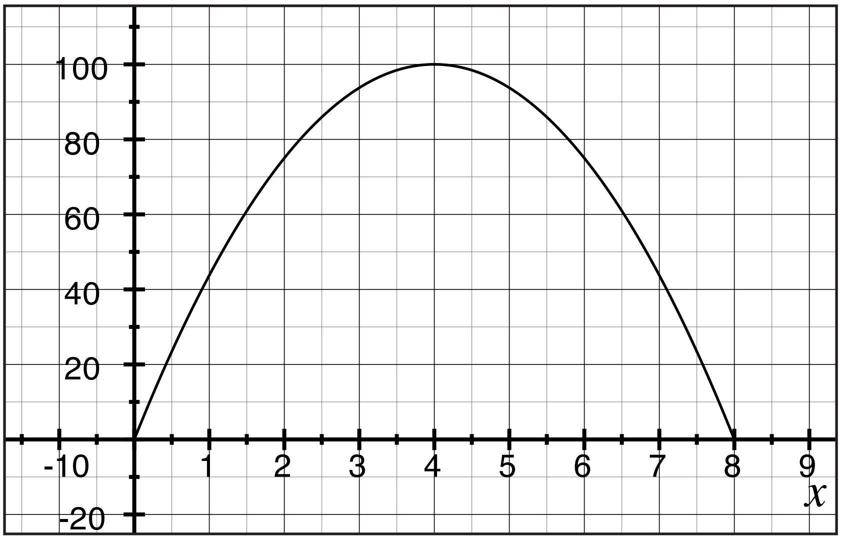
On définit de plus la fonction « envie » v dérivée de la fonction f ; on a donc v=f' .

On dit qu'il y a « envie » lorsque v est positive ; sinon on dit qu'il y a « rejet » .

***Chaque partie traite d'un modèle différent. Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.***

*PARTIE A:*

On donne ci-dessous l'allure de la courbe représentative d'une fonction de satisfaction f définie et dérivable sur l'intervalle [ 0 ; 8 ].




❶ Pour quelle quantité x de produit y a-t-il saturation ?
❷ Sur quel(s) intervalle(s) y a t-il envie ? y a t-il rejet ?;
❸ Par lecture graphique, donnez v(4).
❹ Exprimez v(x) en fonction de x sachant que v est une fonction affine définie sur l'intervalle [ 0 ; 8 ] vérifiant v(0)=50 .

*PARTIE B : Etude de la fonction*

La fonction de satisfaction, f, pour un salaire dans une entreprise est modélisée pour tout x de [ 0 ; + ∞ [ par :

$$f(x) = \frac{100\,x}{x+1}$$

où x désigne le salaire annuel d'un employé en milliers d'euros.

❶ Déterminer la fonction envie correspondante ;
❷ Déterminer la limite de f en +∞ . Interprétez graphiquement le résultat.
❸ Etudier le sens de variation de f sur [ 0 , + ∞ [. Dressez le tableau de variations .
❹ Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour 1 000 euros et 1 cm en ordonnée.
❺ Interpréter les résultats obtenus ( limite et variations de f ) en terme de satisfaction.

**EXERCICE 2 ( points)**

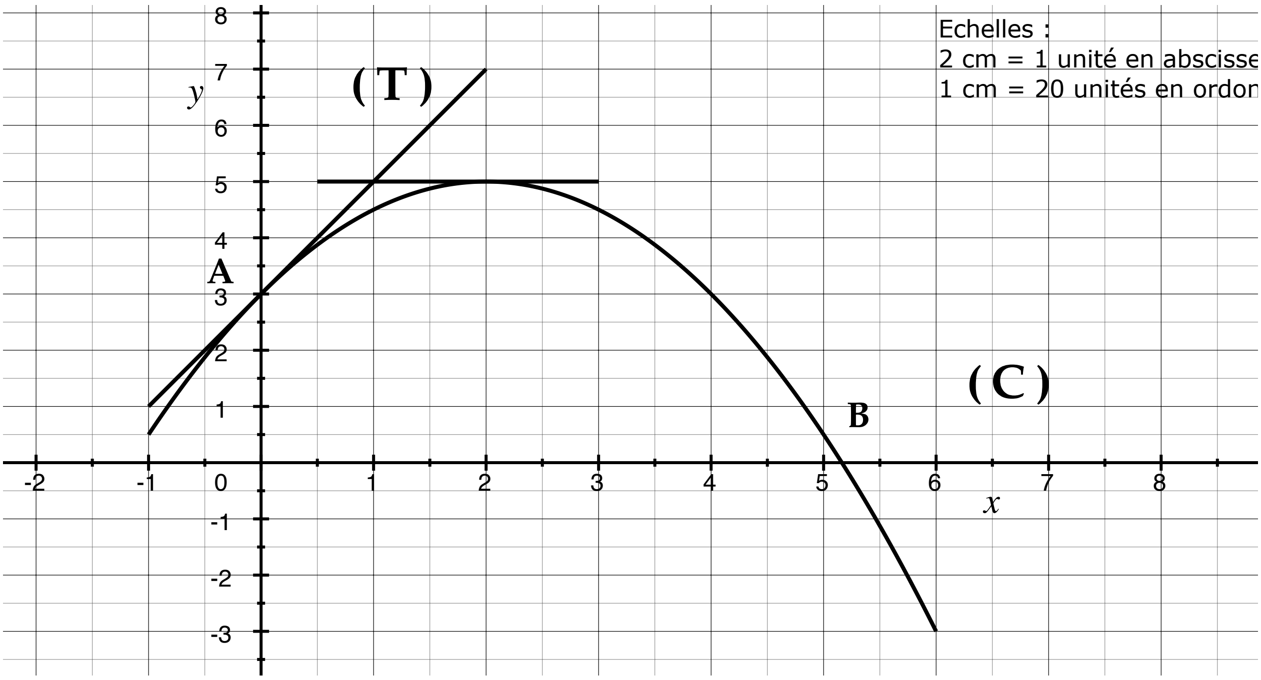
Sur la figure ci-dessous est tracée la courbe (C) représentant, dans le plan muni d'un repère orthogonal, une fonction f définie dans l'intervalle [ -1 ; 6 ].

On sait que la courbe (C) :

✎ coupe l'axe des ordonnées en un point A, d'ordonnée 3, et l'axe des abscisses en le point B d'abscisse b ;

✎ admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses au point d'abscisse 2 ;

✎ admet la droite (T) pour tangente au point A




***PARTIE A : Etude graphique de la fonction f:***
**Les réponses seront justifiées avec soin**

❶ – Lisez graphiquement :

f(-1) = ; f(0) = ; f(2) = ; f(5) = ; f(6) = ;

❷ – Résolvez graphiquement sur [ -1 ; 6 ] :

f(x) = 0 ; $f(x) \geq 1/2$ ;

❸ – Déterminez graphiquement :

f'(0) = ; f'(2) = ;

❹ – Résolvez graphiquement sur [ -1 ; 6 ] :

$f'(x) < 0$ ;

***PARTIE B : Etude de la fonction g = √f:***

On étudie maintenant la fonction g qui à x associe $g(x) = \sqrt{f(x)}$ :

**Chacune des réponses suivantes devra être justifiée avec soin :**

❶ – Précisez l'intervalle de définition I de la fonction g.

❷ – Etudier les variations de la fonction g sur I.

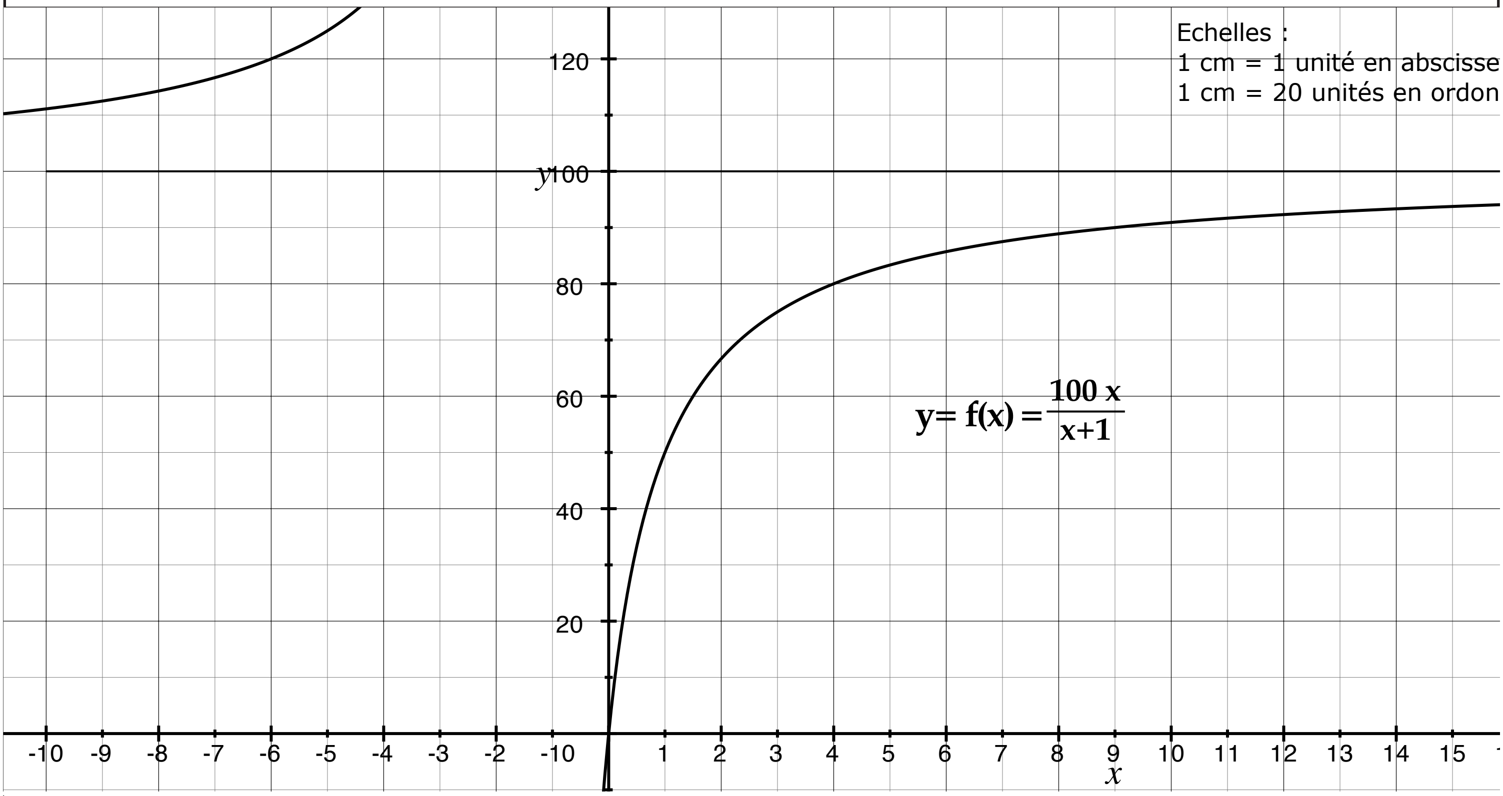
❸ – Calculer g'(0) et g'(2).

❹ – Résolvez dans I l'inéquation $g(x) \geq \sqrt{3}$ .

❺ – Construisez la courbe représentative de g sur I.

**EXERCICE 1 ( points)**

*PARTIE B:*




$$f(x) = \frac{100\ x}{x + 1}$$

Etude de la limite de f quand x tend vers + l'infini :

$$f(x) = \frac{x\ 100}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{100}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \quad \text{pour tout } x > 0$$

$$\text{puisque} : \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \ \text{ donc } \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 \text{ donc } \lim_{x \to \infty} \frac{100}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 100$$

Etude de la dérivée de f :

$$\text{pour tout } x \geq 0 \quad ; \quad f'(x) = \frac{100}{(x + 1)^2}$$

Etude des variations et du sens de variation de f :

Puisque pour tout x ≥0, $(x + 1)^2 \geq 1$ donc $f'(x) > 0$

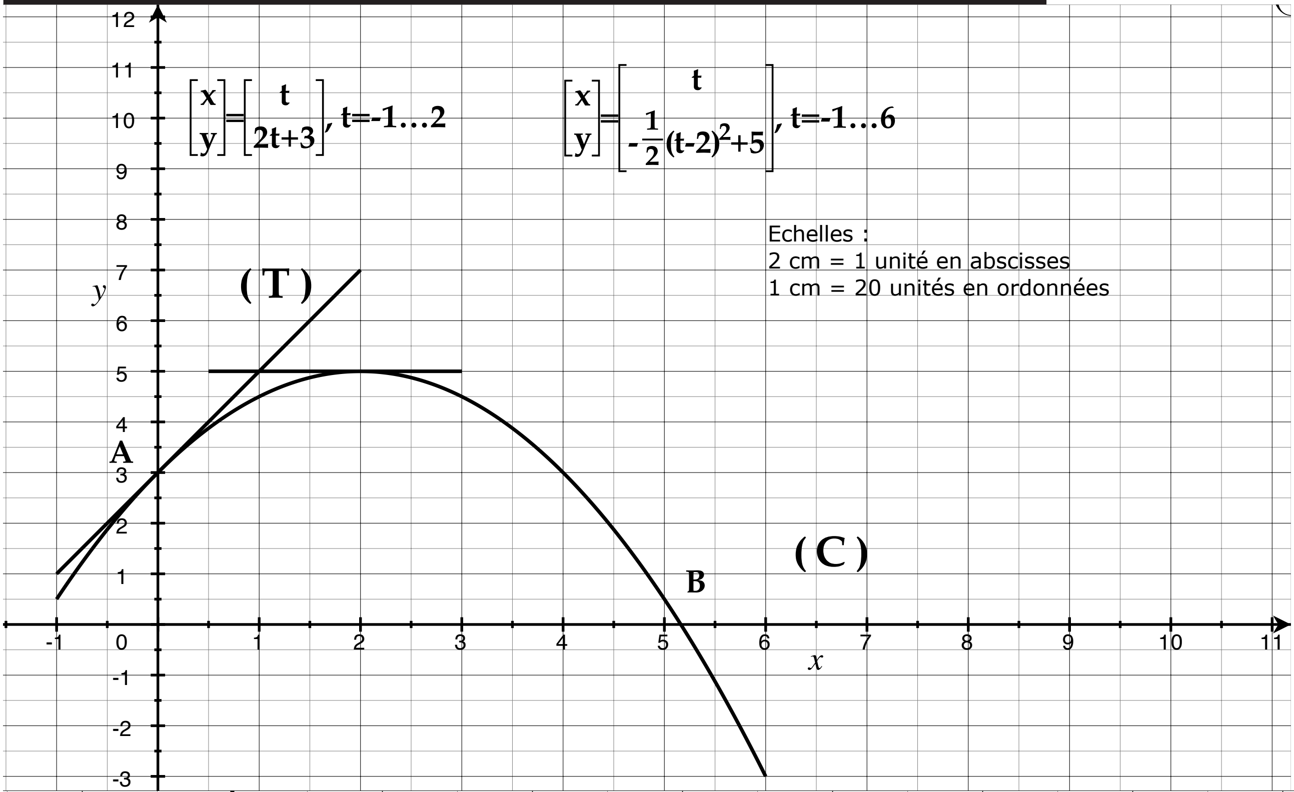
Donc la fonction $f'$ est strictement positive pour tout tout $x \geq 0$ ,

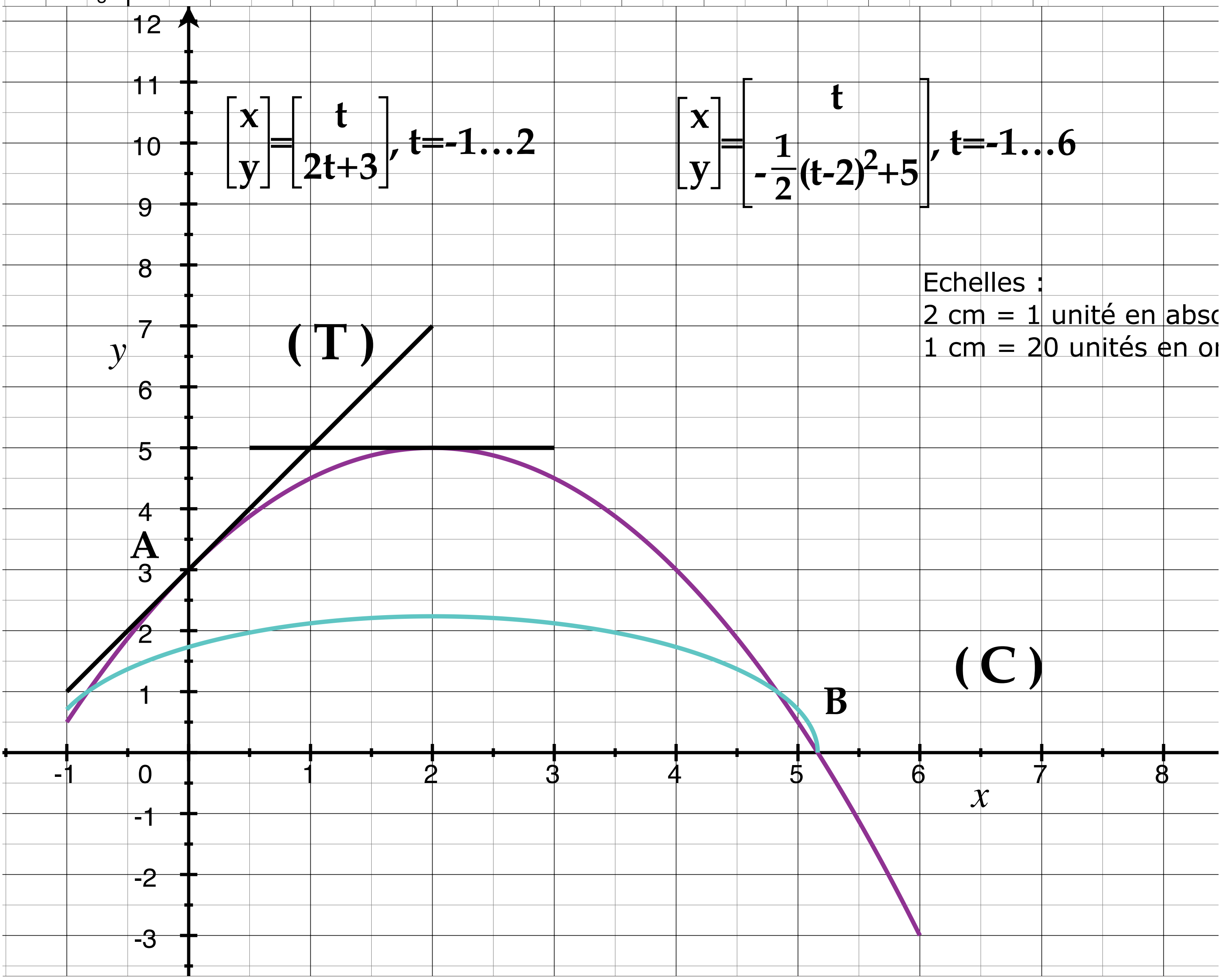
donc le fonction f est strictement croissante pour tout tout $x \geq 0$

et prends ses valeurs dans l'intervalle [ 0 ; 100 ]

Interprétation :

La fonction satisfaction est croissante mais n'atteint jamais la valeur 100.


$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t+3 \end{bmatrix}$, t=-1...2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{1}{2}(t-2)^2+5 \end{bmatrix}$, t=-1...6
Echelles :
2 cm = 1 unité en abscisses
1 cm = 20 unités en ordonnées
(T)
(C)
A
B
x
y


$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 2t+3 \end{bmatrix}$, t=-1...2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -\frac{1}{2}(t-2)^2+5 \end{bmatrix}$, t=-1...6
Echelles :
(T)
(C)
A
B
x
y