Devoir en classe n°9

Chapitre n°4 page 78-107 ;
1 ES 1
Année scolaire 2006/2007

Polynômes du Second Degré ;
Le Lundi 26 Février 2007

Exercice n°1 : **Coût et chiffre d'affaires**

Une unité de production est sous traitant pour une grande marque de jouets.
Elle fabrique des poupées et vend toute sa production.

Le coût total de fabrication de x milliers de poupées est donné par l'expression de la fonction $C(x) = 0{,}05x^2+x+80$ pour x appartenant à [0 ; 100] et C(x) est donné en milliers d'euros ;

❶ – Etudier le sens de variation du coût total : (mise sous forme canonique du polynôme , mise en évidence des caractéristiques de la parabole , présentation du tableau de variations) ;

❷ – Résoudre l'équation $C(x)=480$;
En donner une interpétation concrète.

Le chiffre d'affaires R obtenu par la vente de x milliers de poupées produites est tel que ;

$R(50) = 300$ et $R(60) = 360$

c'est à dire que 60 milliers de poupées apportent 360 k€ de recette.

❸ – Sachant que le chiffre d'affaires est une fonction affine de la quantité, déterminer cette fonction affine ;

On considère la fonction B qui a pour expression de la fonction
$B(x) = -0{,}05x^2+5x-80$ pour x appartenant à [0 ; 100] ;

❹ – Etablir que ***la fonction B est la fonction bénéfice*** de cette usine pour la production (et vente) de x milliers de poupées ;

❺ – Etudier le sens de variation de la fonction B ;
En déduire le nombre de poupées à produire pou que le bénéfice soit maximal.
Donner la valeur de ce bénéfice maximal.

❻ – Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (c'est à dire positif ou nul).

❼ – Dans le même repère orthogonal, bien choisi (1 cm pour 5 unités en abscisses et 1 cm pour 50 unités en ordonnées) , représenter les fonctions C, R et B ; placer tous les points mis en valeur au cours des questions précédentes.
Mettre en couleur la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice.

<u>Exercice n°2 :</u> Prix d'un menu

Les réponses aux questions ne peuvent être justifiées par lecture graphique, le calcul algébrique est exigé.

Après une enquête auprès de sa clientèle, un restaurateur cherche à fixer le prix de son menu touristique qui se situe entre 6 et 10 €.

Le nombre de demandes de menus d(x) pour un prix x est donné par l'expression suivante :

$$d(x) = -3{,}6x + 50{,}4$$

Le nombre de menus f(x) qu'il peut offrir, pour un prix x, est donné par l'expression suivante :

$$f(x) = -\frac{115{,}2}{x} + 36$$

❶ – Quelle est la nature de la fonction de demande ? Donner le sens de variation et ses valeurs extrêmes ;

❷ – Démontrer que la fonction d'offre est croissante (démontrer que pour tout x tel que $6 \leq x \leq 10$ alors $f(6) \leq f(x) \leq f(10)$;

❸ – Déterminer par le calcul le prix d'équilibre x_0 tel que l'offre est égal à la demande ;

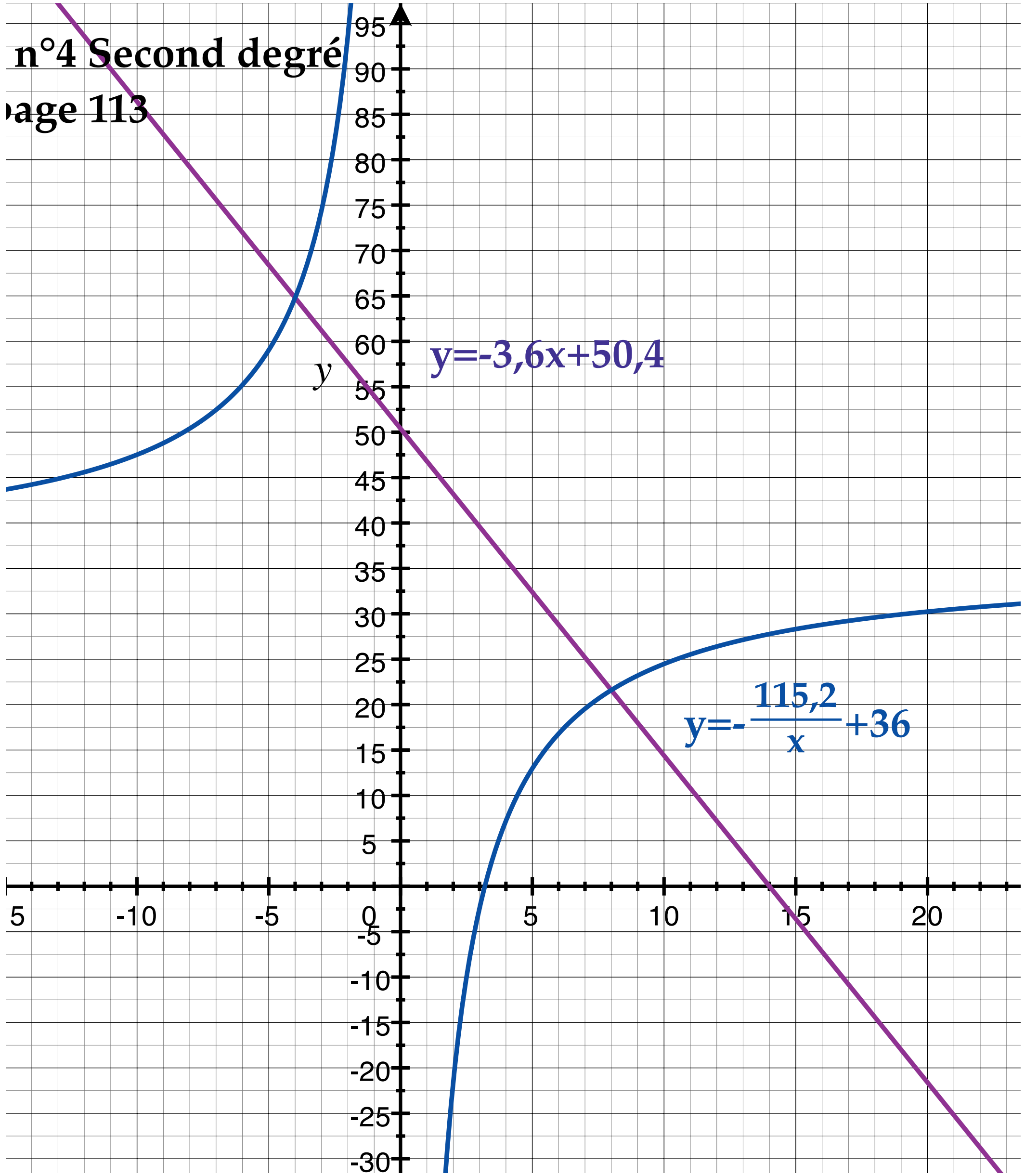
❹ – En déduire le nombre de menus touristiques qui assurent cet équilibre ;

Ce restaurateur a 25 clients. Il propose un menu au prix x_0 d'équilibre

❺ – Quel est son chiffre d'affaires ;

❻ – Résoudre d(x) = 25 ;

❼ – A quel prix ce restaurateur aurait-il dû fixer son menu pour satisfaire à cette demande. Calculer la différence de chiffre d'affaires.



$C(x) = 0{,}05x^2 + x + 80 = \frac{1}{20}\left(x^2 + 20x + 1600\right) =$

$C(x) = \frac{1}{20}\left(x^2 + 20x + 100 - 100 + 1600\right) =$

$C(x) = \frac{1}{20}\left[\left(x^2 + 20x + 100) + 1500\right)\right] =$

$C(x) = \frac{1}{20}\left[\left((x+10)^2 + 1500\right)\right] = \frac{1}{20}(x+10)^2 + 75$

Parabole de sommet (-10 , 75) concavité tournée vers les y positifs

La fonction C est croissante sur [0 , 100]

$C(x) = \frac{1}{20}(x+10)^2 + 75 = 480$; $(x+10)^2 - 8100 = 0 = (x+100)(x-80)$

Les solutions sont : x = 80 et x = -100 ;

480 € est le coût de fabrication de 80 000 de poupées.

$R(x) = 6x$

$B(x) = R(x) - C(x) = 6x - (0{,}05x^2 + x + 80) = -0{,}05x^2 + 5x - 80$

$B(x) = -\frac{1}{20}\left(x^2 - 100x + 1600\right) = \frac{1}{20}\left[\left((x-50)^2 - 900\right)\right] = (x - 50 - 30)(x - 50 + 30)$

$B(x) = -\frac{1}{20}(x-50)^2 + 45 =$

Parabole de sommet (50 , 45) concavité tournée vers les y négatifs

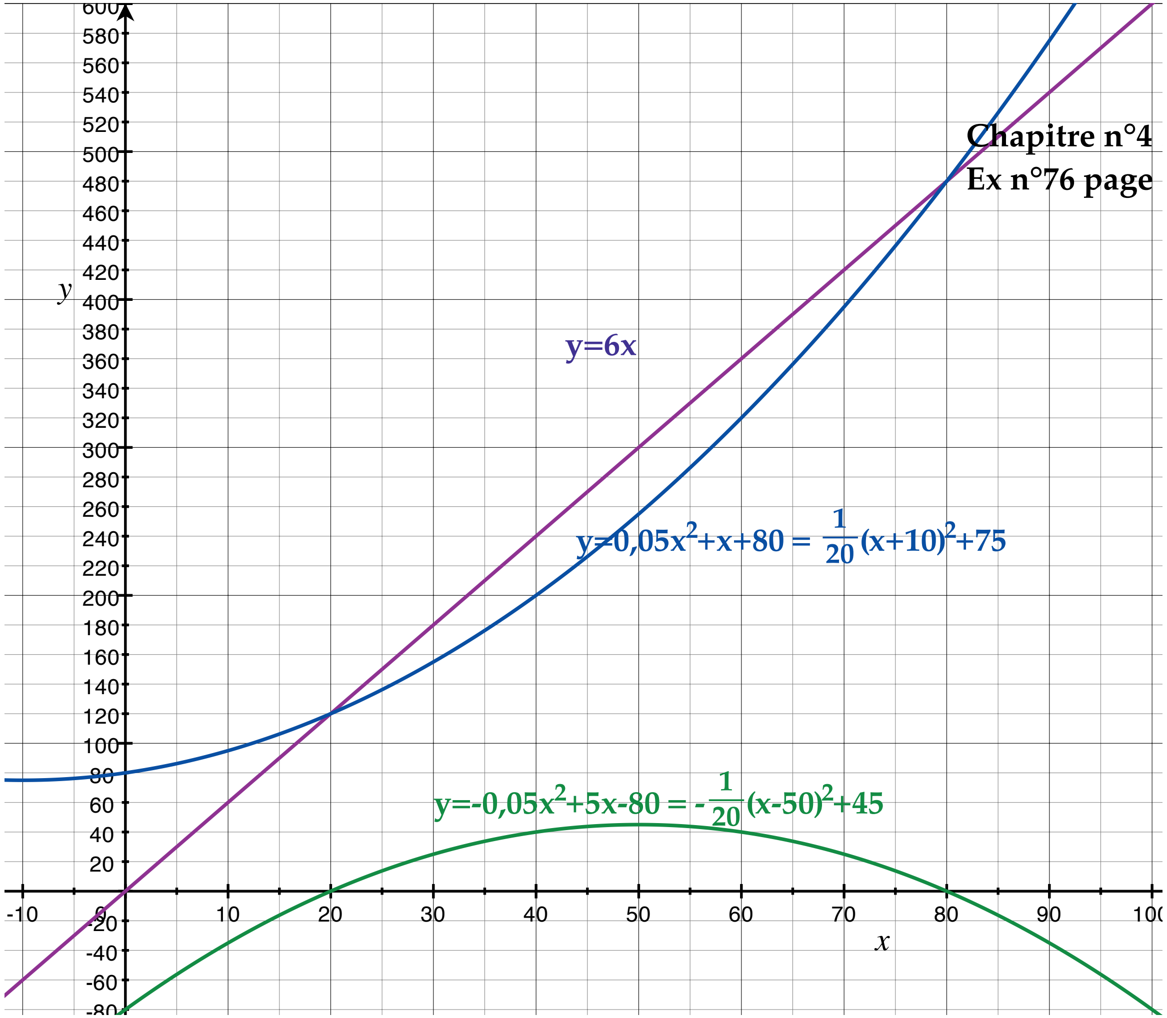
La fonction B est croissante sur [0 , 50] et décroissante sur [50 , 100]

$B(x) = -\frac{1}{20}(x-50)^2 + 45 = 0 = (x-80)(x-20) = -0{,}05x^2 + 5x - 80$

Les solutions sont : x = 80 et x = 20 ;

Le signe du polynôme $B(x) = -0{,}05x^2 + 5x - 80$ est du signe de -0,05 à l'extérieur des racir

La solution de $B(x) \geq 0$ est l'intervalle [20 , 100]



$d(x) = -3{,}6x + 50{,}4$

$f(x) = -\dfrac{115{,}2}{x} + 36$

puisque $6 \leq x \leq 10$ donc $\dfrac{1}{10} \leq \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{6}$

puisque $6 \leq x \leq 10$ donc $\dfrac{-115{,}2}{6} \leq \dfrac{-115{,}2}{x} \leq \dfrac{-115{,}2}{10}$

puisque $6 \leq x \leq 10$ donc $\dfrac{-115{,}2}{6} + 36 \leq \dfrac{-115{,}2}{x} + 36 \leq \dfrac{-115{,}2}{10} + 36$

puisque $6 \leq x \leq 10$ donc $f(6) \leq f(x) \leq f(10)$

la fonction f est croissante sur [6 ; 10]

Calcul de la valeur d'équilibre :

$d(x) = -3{,}6x + 50{,}4 = f(x) = -\dfrac{115{,}2}{x} + 36$

(E) : $-3{,}6x + 50{,}4 = -\dfrac{115{,}2}{x} + 36$

(E) : $-3{,}6x + 50{,}4 - 36 + \dfrac{115{,}2}{x} = 0$

(E) : $-3{,}6\left(x - 4 - \dfrac{32}{x}\right) = -3{,}6\,(x^2 - 4x - 32) = 0$

(E) : $x^2 - 4x + 4 - 4 - 32 = (x-2)^2 - 36 = 0$

(E) : $(x-2)^2 - 36 = [\,(x-2) - 6\,]\,[\,(x-2) + 6\,] = 0$

Les solutions de (E) sont : $x = 8$ et $x = 4$

La valeur d'équilibre est : $x_0 = 8$

Chiffre d'affaires pour 25 clients : $25 \,.\, 8 = 200$ euros

Résolution de $d(x) = 25$; $3{,}6\,x = 25{,}4$; $x \simeq 7$ euros

Différence de chiffre d'affaires : $200 - 175 = 25$ euros