



a	b	$a^2 + ab + b^2$	Signe de $a^2 + ab + b^2$

c) Quelle conjecture peut-on faire sur le signe de l'expression $a^2 + ab + b^2$?

2) a) Vérifier que :

pour tous réels a et b , $a^2 + ab + b^2 = (a + b)^2 - ab$.

b) En déduire le signe de l'expression $a^2 + ab + b^2$.

108 Calcul littéral – Aire maximale

1) Démontrer que :

pour tous réels a et b , $ab = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$.

2) En déduire que le produit ab est toujours inférieur ou égal à $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, sa valeur maximale $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ étant atteinte lorsque $a = b$.

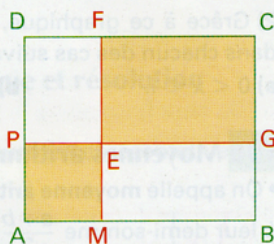
3) **Application** : Parmi tous les rectangles dont le périmètre est égal à 600 m, déterminer les dimensions de celui qui a une aire maximale.

109 Égalité d'aires

On considère un rectangle ABCD tel que :

AB = 10 cm et AD = 8 cm.

M étant un point du segment [AB], on construit le carré AMEP et le rectangle EGCF.



On note x la longueur, en cm, du segment [AM] et $f(x)$ l'aire, en cm^2 , de la partie coloriée.

1) Démontrer que l'aire de la partie coloriée est égale à $(8-x)(10-x) + x^2$.

2) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = (8-x)(10-x) + x^2.$$

Développer, réduire et ordonner $f(x)$.

3) a) Calculer l'aire, en cm^2 , du rectangle ABCD.

b) Pour quelle valeur de $f(x)$ l'aire de la partie coloriée est-elle égale à l'aire de la partie non coloriée ?

4) Soit $A(x) = 2x^2 - 18x + 80$.

a) Démontrer que l'équation $A(x) = 40$ est équivalente à l'équation $4x^2 - 36x + 80 = 0$, elle-même équivalente à l'équation $4x^2 - 36x + 81 = 1$.

b) En déduire que l'équation $A(x) = 40$ est équivalente à l'équation $(2x-9)^2 = 1$.

c) Résoudre l'équation $(2x-9)^2 = 1$.

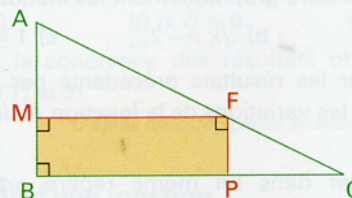
5) a) D'après les questions précédentes, pour quelle(s) position(s) du point M sur le segment [AB] l'aire de la partie coloriée est-elle égale à l'aire de la partie non coloriée ?

D'après DEP (Direction de l'Évaluation et de la Prospective, MEN)

110 Aire maximale

On considère un triangle ABC rectangle en B et tel que : AB = 4 cm et BC = 8 cm.

Un point F représente la position d'une fourmi qui se déplace sur le segment [AC] sans atteindre les points A et C. Le point F se projette orthogonalement en M sur le segment [AB] et en P sur le segment [BC].



1) Déterminer la valeur exacte de AC et l'aire du triangle ABC.

2) On note x la longueur AM.

a) Démontrer que $MF = 2x$.

b) Démontrer que l'aire du rectangle MFPB est égale à $2x(4-x)$.

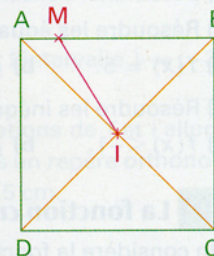
c) Démontrer que cette dernière expression est aussi égale à $8 - 2(x-2)^2$.

En déduire que l'aire du rectangle MFPB est toujours inférieure ou égale à 8.

d) Pour quelle valeur de x l'aire du rectangle MFPB est-elle maximale ?

111 * Distance minimale

Une unité de longueur étant choisie, on considère un carré ABCD de côté 1 et de centre I. Soit M un point du segment [AB] qui peut prendre toutes les positions sur ce segment. L'objectif de cet exercice est de déterminer la position de M pour laquelle la longueur IM est minimale.



1) Conjecturer géométriquement le résultat, puis le démontrer géométriquement.

2) On considère le repère du plan $(D ; \vec{DC}, \vec{DA})$.

a) Déterminer les coordonnées de M et celles de I dans ce repère.

b) Démontrer que : $IM^2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$.

3) On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

a) Démontrer que f est décroissante sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$.

(On pourra, dans chaque cas, considérer deux réels a et b de l'intervalle tels que $a < b$ et comparer $f(a)$ et $f(b)$.)

b) En déduire que f admet un minimum et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.

En déduire la position du point M correspondante.

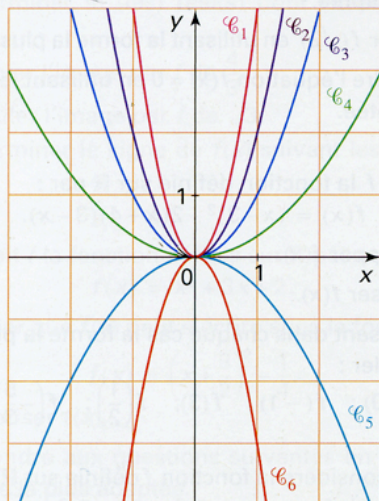


Fonctions déduites de la fonction carré

63 Soit f, g, h, k, l, m les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2; & g(x) &= -\frac{1}{2}x^2; & h(x) &= 4x^2; \\ k(x) &= x^2; & l(x) &= -3x^2; & m(x) &= \frac{1}{3}x^2. \end{aligned}$$

Les six courbes de la figure suivante sont les courbes représentatives de ces six fonctions.



Attribuer à chaque fonction sa courbe représentative.

Pour les exercices 64 à 66, le plan est muni d'un repère orthonormé.

64 Dans chacun des cas suivants :

a) déduire des variations de la fonction carré les variations de la fonction f , puis dresser son tableau de variations.

b) tracer la courbe représentative de la fonction f en utilisant la courbe représentative de la fonction carré.

1) $f(x) = 3x^2$. 2) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$. 3) $f(x) = \sqrt{2}x^2$.

65 Répondre aux questions a) et b) de l'exercice précédent pour chacune des fonctions f suivantes.

1) $f(x) = 2x^2 + 1$. 2) $f(x) = 3x^2 - 2$. 3) $f(x) = 4 - \frac{1}{2}x^2$.

Je m'entraîne seul(e)

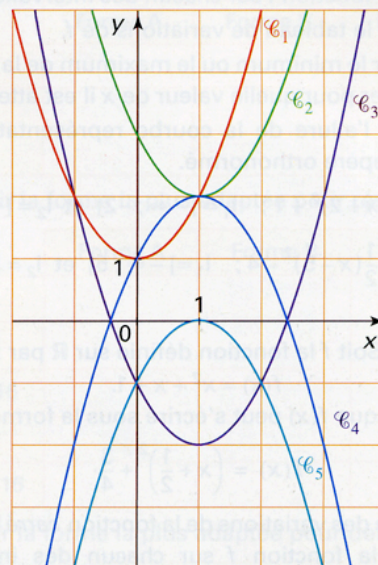
66 Répondre aux questions a) et b) de l'exercice 64 pour chacune des fonctions f suivantes.

1) $f(x) = \frac{3}{4}x^2$. 2) $f(x) = -5x^2$.
3) $f(x) = 3x^2 + 4$. 4) $f(x) = -2x^2 + 5$.

67 Soit f, g, h, k, l les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 + 2; & g(x) &= (x-1)^2 - 2; \\ h(x) &= x^2 + 1; & k(x) &= -(x-1)^2; & l(x) &= -(x-1)^2 + 2. \end{aligned}$$

Les cinq courbes de la figure suivante sont les courbes représentatives de ces cinq fonctions dans un repère orthonormé.



Attribuer à chaque fonction sa courbe représentative.

68 Soit f, g, h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2(x+2)^2 - 4; \quad g(x) = 5 - (x-2)^2;$$

$$h(x) = -3(x-3)^2 + 1.$$

Les tableaux de variations suivants sont ceux des fonctions f, g, h .

x	$-\infty$	3	$+\infty$
		1	

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
		-4	

x	$-\infty$	2	$+\infty$
		5	

Attribuer à chaque fonction son tableau de variations.

69 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 3.$$

1) Déduire des variations de la fonction carré les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $I_1 =]-\infty; 1]$ et $I_2 = [1; +\infty[$.

2) Dresser le tableau de variations de f .

3) Justifier que le minimum de la fonction f est 3 et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.

4) Donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.



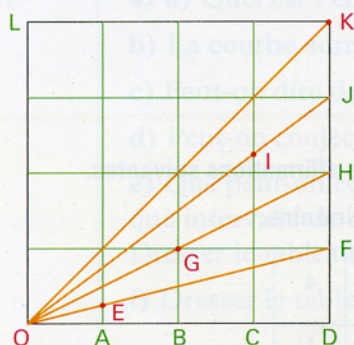
112 * Hauteur d'un trapèze

L'aire d'un trapèze rectangle est égale à 10 cm^2 . Sa plus grande base mesure 6 cm , et il a un angle de 45° . On note b la longueur de sa petite base et h sa hauteur. Quelle est la hauteur de ce trapèze ?

● **Indication** : Faire une figure en notant les données de l'énoncé pour faire la mise en équation.

113 * Parabole dans un carré

Les côtés du carré KLOD représenté ci-dessous ont pour longueur 1 (une unité ayant été choisie). Il est partagé en seize carrés identiques.



1) Démontrer que :

a) $AE = \frac{1}{16}$ b) $GB = \frac{1}{4}$ c) $IC = \frac{9}{16}$

2) En déduire que O, E, G, I, K appartiennent à la parabole d'équation $y = x^2$ dans le repère $(O ; \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OL})$.

114 * Changement de repère

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 7$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) Démontrer que :

pour tout réel x , $f(x) = (x - 2)^2 + 3$.

2) Soit M un point du plan et A le point de coordonnées $(2 ; 3)$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. On note $(x ; y)$ les coordonnées de M dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Exprimer les coordonnées $(X ; Y)$ du vecteur $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y .

b) Justifier que le couple $(X ; Y)$ est le couple de coordonnées du point M dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.

c) Démontrer que : si M appartient à la courbe $\mathcal{C}$, alors ses coordonnées $(X ; Y)$ dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ vérifient la relation : $Y = X^2$.

Démontrer que, réciproquement : si un point M a des coordonnées $(X ; Y)$ dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ telles que $Y = X^2$, alors le point M appartient à la courbe $\mathcal{C}$. On peut donc dire que $Y = X^2$ est une équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$ ou que la courbe $\mathcal{C}$ est la représentation graphique la fonction carré dans le repère $(A ; \vec{i}, \vec{j})$.

d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ en expliquant la méthode utilisée.

115 * Des propriétés des paraboles

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $\mathcal{P}$ la courbe représentative de f , $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}$ et F le point de coordonnées $(0 ; \frac{1}{4})$.

1) Tracer la courbe $\mathcal{P}$ pour x appartenant à l'intervalle $[-2 ; 2]$. (On prendra 2 cm pour unité graphique.)

2) Soit A, B les points de la courbe $\mathcal{P}$ d'abscisses respectives $-1, 2$, et A', B' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B sur la droite $\mathcal{D}$.

a) Placer ces quatre points sur la figure.

b) Calculer les distances AF, BF, AA', BB'.

Que remarque-t-on ?

3) On se propose de démontrer, dans le cas général, la propriété que l'on vient d'observer.

Soit M un point quelconque de la courbe $\mathcal{P}$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. On note x l'abscisse de M.

a) Déterminer les coordonnées de M et de H.

b) Démontrer que $MH = MF$.

c) Énoncer la propriété que l'on vient de démontrer.

d) Énoncer la réciproque de la propriété précédente. Démontrer que cette réciproque est vraie.

4) a) Tracer la médiatrice Δ_B du segment $[FB']$.

b) Justifier que le point B appartient à Δ_B .

c) Plus généralement, on considère un point H quelconque de la droite $\mathcal{D}$.

Justifier que le point M d'intersection de la médiatrice du segment $[FH]$ et de la perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ en H appartient à la parabole $\mathcal{P}$.

d) En déduire une construction point par point de la parabole $\mathcal{P}$ dans un repère orthonormé.

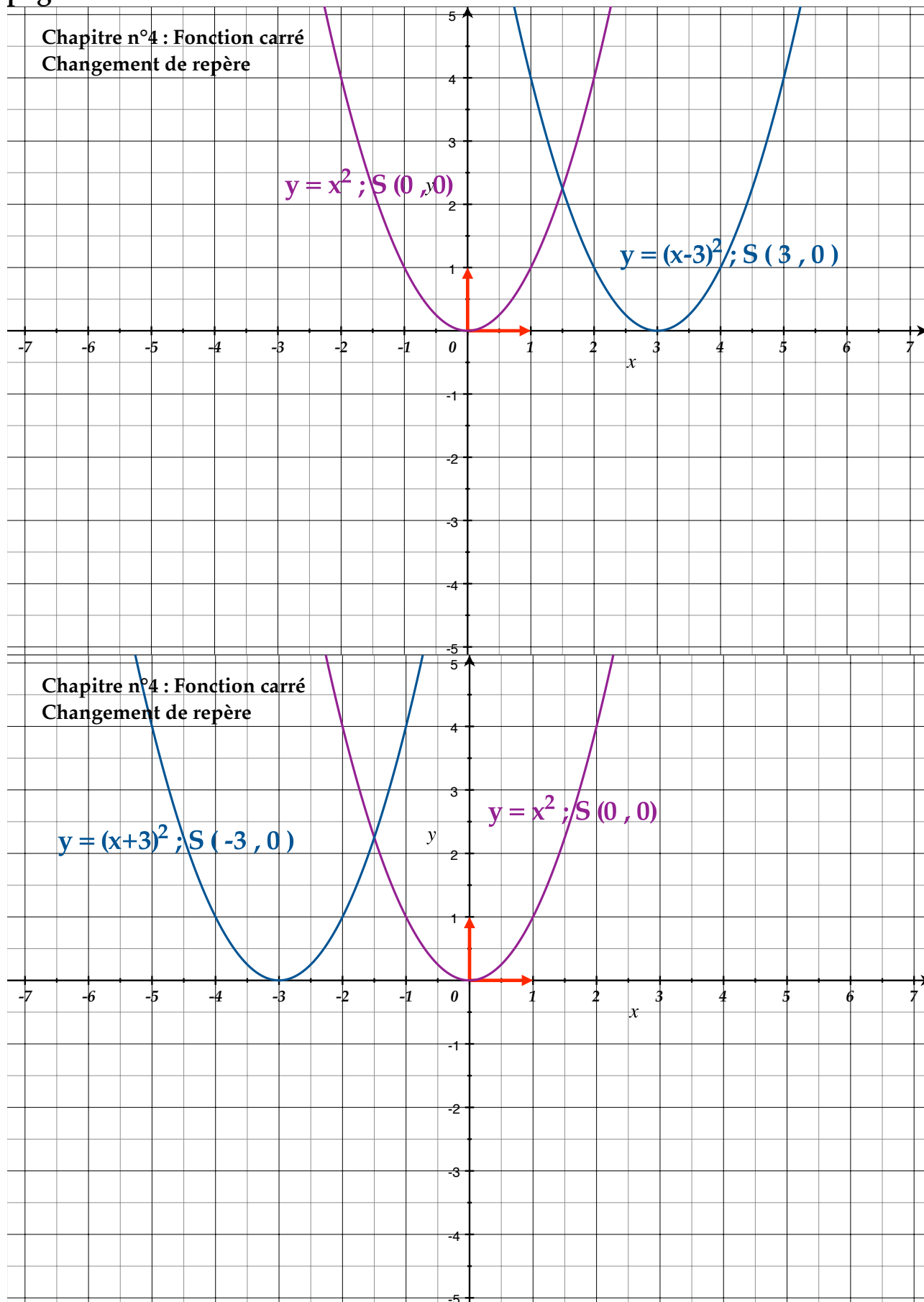
● Le point F est appelé le foyer de la parabole $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ la directrice de $\mathcal{P}$. Dans la question 3), on a établi la caractérisation de la parabole $\mathcal{P}$ par son foyer F et sa directrice $\mathcal{D}$, qui fournit une méthode de construction point par point de $\mathcal{P}$.

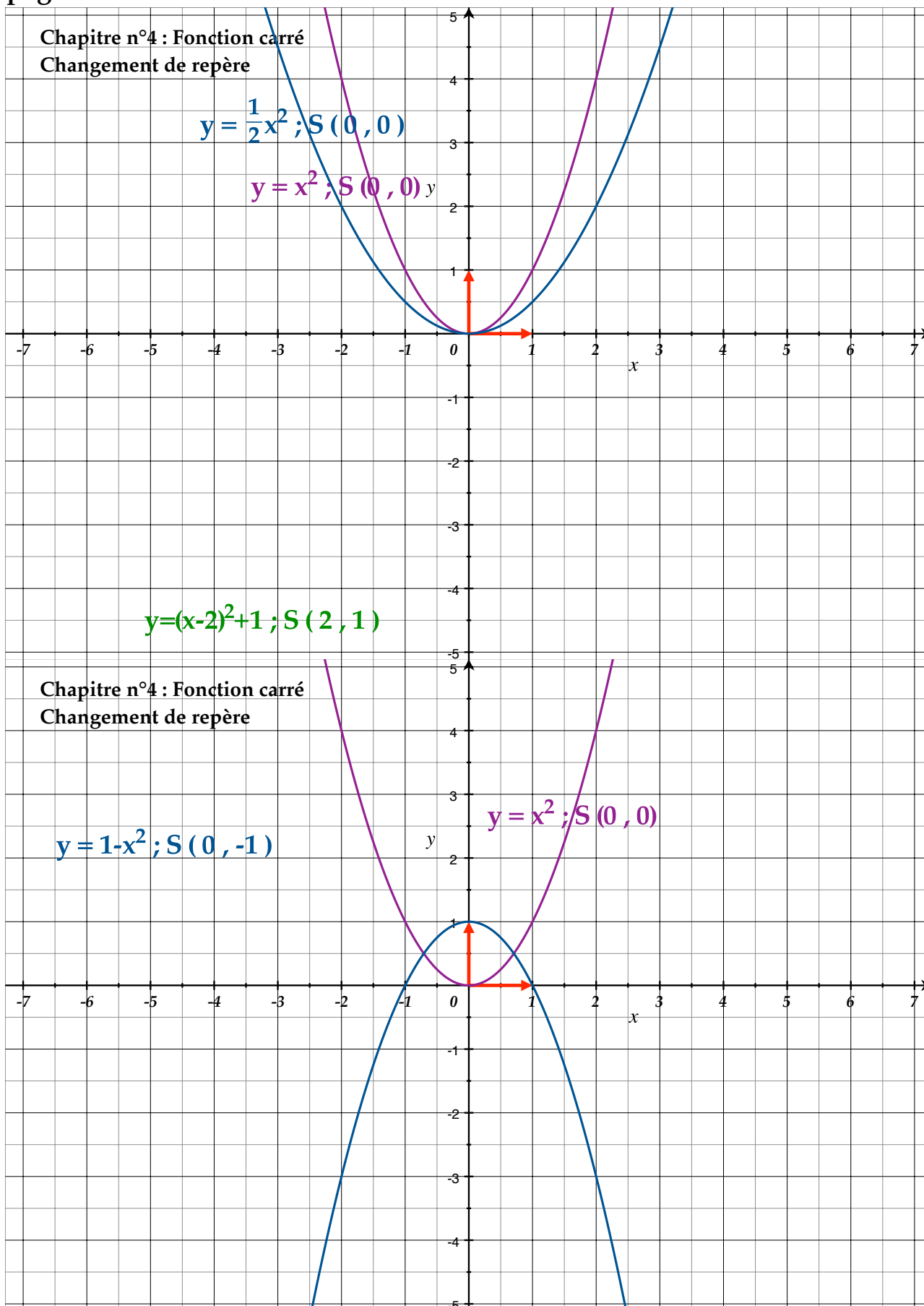
5) a) Tracer la perpendiculaire en B à la droite Δ_B ; on appelle $\mathcal{N}_B$ cette droite. Tracer la parallèle à Δ_B passant par F ; cette droite coupe la droite (BB') en B''.

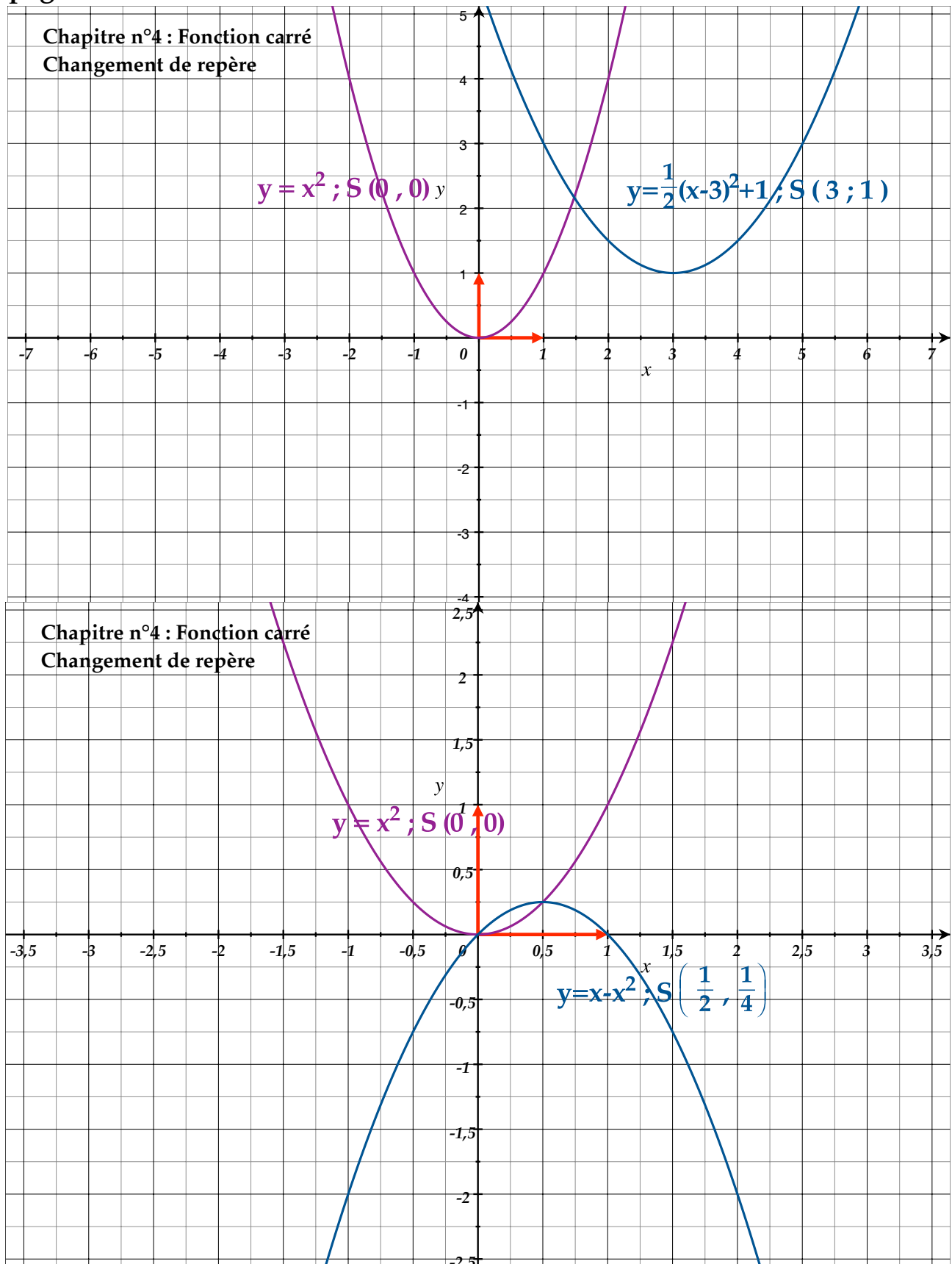
b) Démontrer, par des considérations géométriques, que la droite $\mathcal{N}_B$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FBB''}$.

● Cette propriété géométrique a des applications technologiques importantes. Elle justifie l'utilisation de paraboloïdes de révolution, c'est-à-dire de surfaces engendrées par la rotation d'une parabole autour de son axe, pour les antennes paraboliques, les radars et les fours solaires par exemple. En effet, si (BB'') est la trajectoire d'un rayon rectiligne arrivant en B, alors le rayon réfléchi passe par un point fixe de l'axe, le foyer F, d'où le nom donné à ce point. Donc les rayons réfléchis de tous les rayons parallèles à l'axe convergent au foyer.

Inversement, si (FB) est la trajectoire d'un rayon issu de F, alors le rayon réfléchi a pour trajectoire (BB'') , c'est-à-dire une trajectoire parallèle à l'axe. C'est ce qui justifie la forme des phares de voiture par exemple.







Fait à Nantes le dimanche 27 janvier 2008 08:28:20