BTS ANALYSES BIOLOGIQUES 1999

Devoir n°4 ; BTS ABM1 ;
Année scolaire 2007/2008
Le 2 Février 2008

Les calculatrices de poche sont autorisées. Le formulaire officiel est autorisé.
La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

<u>EXERCICE 1 :</u> (10 points)

Les statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition la probabilité pour qu'un sportif pris au hasard ; d'être déclaré positif est égale à 0,02.

<u>Partie I :</u>

La prise d'un médicament M peut entraîner; chez certains sportifs, un contrôle antidopage positif. En période de compétition, ce médicament, qui diminue fortement les effets de la fatigue musculaire est utilisé par 25% des sportifs. La probabilité, pour un tel sportif, d'être déclaré positif au contrôle antidopage est alors égal à 0,05 ;

Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition, on appelle :

A l'évènement " utiliser le médicament M " et

B l'évènement " être déclaré positif au contrôle antidopage " :

① – Préciser les probabilités suivantes : $P(A)$, $P(B)$, $P(B/A)$; calculer alors $P (A \cap B)$ *(2 pts)* ;

② – Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E_1 : " utiliser le médicament M sachant qu'il est déclaré positif au contrôle antidopage "*(1 pt)*

E_2 : " être déclaré positif au contrôle antidopage sachant qu'il n'utilise pas le médicament M " *(2 pts)*

<u>Partie II :</u>

On fait subir des contrôles antidopages à un échantillon de 200 individus pris au hasard, échantillon de taille très petite par rapport à la population totale. On désigne par X la variable aléatoire qui mesure le nombre d'individus dont les contrôles sont déclarés positifs. Pour les questions suivantes les résultats seront arrondis à 10^{-3} près ;

① – Démontrer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (200 , 0,02) ; *(1,5 pt)*

② – Calculer la probabilité qu'aucun contrôle ne soit déclaré positif ; calculer l'espérance et la variance mathématique de X ; *(1,5 pt)*

③ – Démontrer que la loi X peut être approchée par Y une loi de Poisson dont on précisera la valeur du paramètre λ ($\lambda = np$). Calculer la probabilité $p(Y \geq 1)$ *(2 pts)* ;

<u>Partie III :</u>

A la suite de contrôles antidopages, sur un échantillon de 200 individus pris au hasard ; 8 individus ont été déclarés positifs .

On désigne par F la variable aléatoire qui , à tout échantillon de 200 individus, associe le pourcentage de sportifs déclarés positifs. On suppose que F suit la loi normale

– Au seuil de risque 0,10 calculer un intervalle de confiance centré en $p_0 = 0{,}02$ permettant d'établir si l'échantillon choisi avant la compétition sportive témoigne ou non d'une augmentation du dopage pour cette compétition.

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

EXERCICE 1 (points)

Les statistiques ont permis d'établir qu'en période de compétition la probabilité pour qu'un sportif pris au hasard; d'être déclaré positif est égale à 0,02.

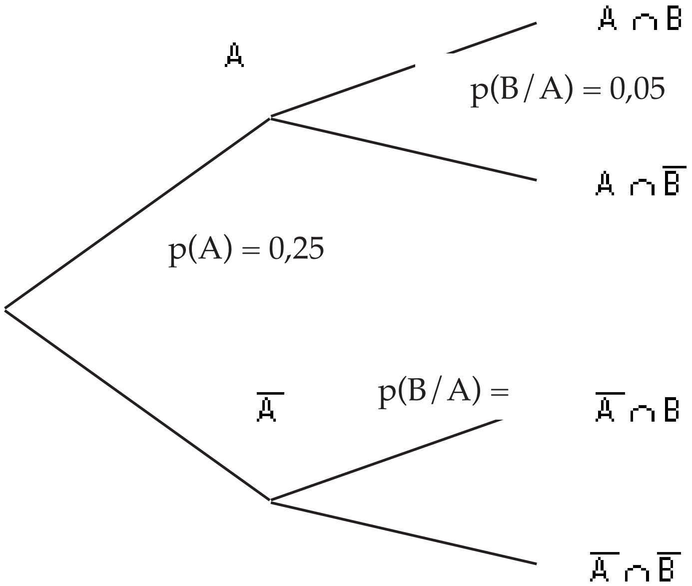
Partie I :

La prise d'un médicament M peut entraîner; chez certains sportifs, un contrôle antidopage positif. En période de compétition, ce médicament, qui diminue fortement les effets de la fatigue musculaire est utilisé par 25% des sportifs. La probabilité, pour un tel sportif, d'être déclaré positif au contrôle antidopage est alors égal à 0,05 ; Pour un sportif choisi au hasard en périodse de compétition, on appelle A l'évènement " utiliser le médicament M " et B l'évènement " être déclaré positif au contrôle antidopage " :

❶ – *Préciser les probabilités suivantes : P(A) , P(B) , P(B/A) ; calculer alors P (A ∩ B) ;*

Solution :

En hypothèse : p(A) = 0,25 , p(B) = 0,02 , p(B/A) = 0,05 .



En hypothèse : p(A) = 0,25 , p(B) = 0,02 , p(B/A) = 0,05 .

A ∩ B : " utiliser le médicament M et être déclaré positif au contrôle antidopage " ;

Par définition de la probabilité conditionnelle

p (A ∩ B) = p(A) . p(B/A) = 0,25 0,05 = 0,0125 ;

$p(E_2) = p(B/\overline{A})$

Sachant que $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$

et que les évènements $(B \cap A)$ et $(B \cap \overline{A})$ sont incompatibles

donc : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A})$

donc : $0{,}02 = 0{,}0125 + p(B \cap \overline{A})$

donc : $0{,}02 - 0{,}0125 = p(B \cap \overline{A})$

donc : $0{,}0075 = p(B \cap \overline{A})$

Par définition de la probabilité conditionnelle :

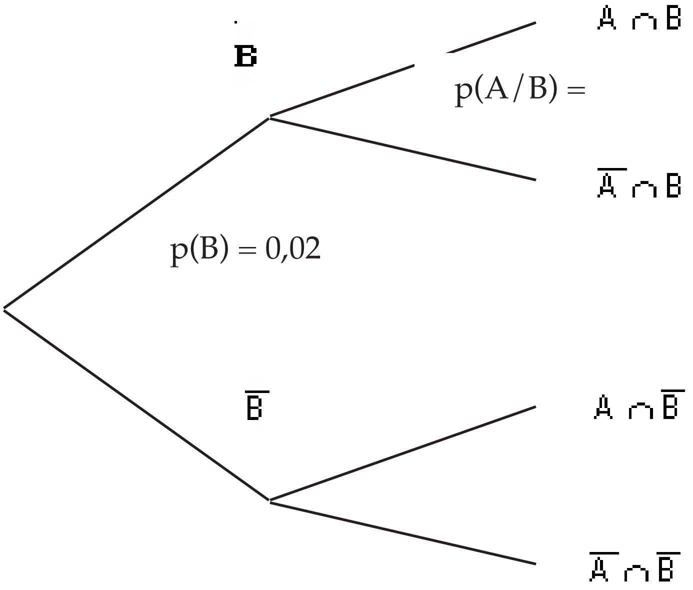
$p(B \cap \overline{A}) = p(\overline{A})p(B/\overline{A})$

Puisque les évènements A et $\overline{A}$ sont contraires donc :

$p(\overline{A}) + p(A) = 1$; $p(\overline{A}) + 0{,}25 = 1$; $p(\overline{A}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$;

Donc : $p(B \cap \overline{A}) = 0{,}0075 = p(\overline{A})p(B/\overline{A}) = 0{,}75\, p(B/\overline{A})$;

Donc : $p(B/\overline{A}) = \dfrac{0{,}0075}{0{,}75} = 0{,}01$



❷ – *Pour un sportif choisi au hasard en période de compétition calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :*

E_1 : " utiliser le médicament M sachant qu'il est déclaré positif au contrôle antidopage "

E_2 : " être déclaré positif au contrôle antidopage sachant qu'il n'utilise pas le médicament M "

Solution :

En hypothèse : p(A) = 0,25 , p(B) = 0,02 , p(B/A) = 0,05 .

☞p(E_1) = p(A/B): "utiliser le médicament M sachant qu'il a été déclaré positif au contrôle antidopage" ;

On se situe sur le deuxième arbre du choix

p (A ∩ B) = 0,0125 = p(B) . p(A/B) = 0,02 . p(A/B) = 0,0125 ;

p(A/B) = 0,0125 / 0,02 = 0,625 ;

p(E_1) = 0,625 .

☞ p(E_2) = probabilité d'" être déclaré positif au contrôle antidopage sachant qu'il n'utilise pas le médicament M " ;

Donc : **p(E_2) =0,0075 / 0,75 = 0,01** ;

Partie II :

On fait subir des contrôles antidopages à un échantillon de 200 individus pris au hasard. On désigne par X la variable aléatoire qui mesure le nombre d'individus dont les contrôles sont déclarés positifs. Pour les questions suivantes les résultats seront arrondis à 10^{-3} près ;

❶ – *Démontrer que X suit la loi binomiale B (200 , 0,02) ;*

Solution :

☞ L'expérience aléatoire qui consiste à effectuer un contrôle antidopage, conduit à deux issues contradictoires:

❆ P : contrôle positif avec la probabilité p = 0,02 ;

❆ P(barre) : contrôle négatif avec la probabilité q = 1 - p = 0,98 ;

☞ On peut considérer que les contrôles sont effectués dans un échantillon dont la taille n = 200 est très petite par rapport à la population des automobilistes ; ceci nous permet d'assimiler ces contrôles à des tirages successifs indépendants.

Ainsi X la variable aléatoire qui, à 200 individus, associe le nombre de contrôles antidopages positifs suit la loi binomiale $\mathscr{B}$ (n , p) c'est à dire $\mathscr{B}$ (200 , 0,02).

❷ – *Calculer la probabilité qu'aucun contrôle ne soit déclaré positif ; calculer l'espérance et la variance mathématique de X ;*

Solution :

☞ De plus E(X) = np = 200.0,02 = 4 et V(X) = np(1-p) = 200 0,02 0,98 = 3,92

❸ – *Démontrer que la loi X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera la valeur du paramètre λ (λ = np). Calculer la probabilité p(X ≥ 1) ;*

Solution :

☞ Pour réaliser une approximation de X par une loi de Poisson les conditions sont : n ≥ 30 ,p ≤ 0,1 et np ≤10 ;

Dans le cas présent n = 200 p = 0,02 et np = 4 ; donc on peut approximer la variable aléatoire X par Yune loi de Poisson de paramètre λ = np = 4 ;

☞ Calculer la probabilité p(Y ≥ 1) :

p(Y ≥ 1) + p(Y < 1) = p(Y ≥ 1)+p(Y = 0)= 1; p(Y ≥ 1) = 1-p(Y = 0)= 1-0,018 ≈ **0,982** .

Remarque : p(X = 0) = $0,98^{200}$≈ 0,0175 , en considérant X comme loi binomiale.