LOI BINOMIALE

Td n°3 ; BTS ABM 1 ; Année scolaire 2007/2008
Le Lundi 7 Janvier 2008

EXEMPLE N°1 :

Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires.
On tire successivement et avec remise 5 boules dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues ;

①– Etablir la loi de probabilité de X , faire une représentation graphique (2 cm pour une unité en abscisses, 2 cm pour 0,1 unité en ordonnées) ;

② – Etablir la fonction de répartition de la variable aléatoire X , et représenter graphiquement cette fonction (2 cm pour une unité en abscisses, 1 cm pour 0,1 unité en ordonnées) ;

EXEMPLE N°2 :

Une urne contient 100 boules : à savoir 75 boules blanches et 25 boules noires.
On tire succesivement et avec remise 5 boules dans l'urne.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, prend pour valeur le nombre de boules blanches obtenues,

① – Etablir la loi de probabilité de X ;

② – Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type σ(X) de la variable aléatoire X ;

③ – Etablir la fonction de répartition de la variable aléatoire X , et représenter graphiquement cette fonction ;

① ② ③ ④ ⑤ ⑥ ⑦ ⑧ ⑨ ⑩

EXEMPLE N°3 :

PARTIE A :

A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse M, il a été procédé à une campagne de vaccinations, 70 % des habitants de A ont été vaccinés.
Une étude statistique antérieure a révélé que 5 % des vaccinés ont été touché à des degrés divers par la maladie, pourcentage élevé à 60% pour les non-vaccinés.

① – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris au hasard ait été touché par la maladie ;

② – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris au hasard ait été vacciné sachant qu'il a été atteint par la maladie ;

PARTIE B :

Les séquelles laissées par la maladie M sont variés, mais on admet que 2% des individus ont subi des lésions de la vue.
On réalise une enquête sur 100 anciens malades d'un secteur donné. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'individus souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon. On suppose que la population du pays est suffisamment importante pour que X suive une loi binomiale.

① – Montrer que l'on peut approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre . Calculer la probabilité pour qu'au cours de cette enquête, on découvre qu'il y ait au moins une personne souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon ;

② – On suppose désormais que la taille de la population soit N ; quel est la plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0{,}95$?

LOI BINOMIALE

EXEMPLE N°4 :

Dans une population donnée 56% des familles occupent une maison individuelle . Parmi elles 78% en sont propriétaires. Parmi les familles n'occupant pas une maison individuelle 24% sont propriétaires de leur logement.

PARTIE A :

On choisit une famille au hasard dans la population considérée.

① – Calculer la probabilité pour qu'une famille soit propriétaire de son logement ;

② – Calculer la probabilité pour qu'une famille habite une maison individuelle sachant qu'elle n'en n'est pas propriétaire ;

PARTIE B :

On interroge cinq familles au hasard. On suppose que les choix sont successifs et indépendants.

On appelle X la variable aléatoire qui associe le nombre de familles propriétaires de leur logement.

① – Etablir la loi de probabilité de X (on donnera des valeurs approchées à 3 décimales) ;

② – Calculer l'espérance mathématique E(X) et l'écart-type σ(X) de la variable aléatoire X ;

LOI BINOMIALE

EXERCICE N°2 :

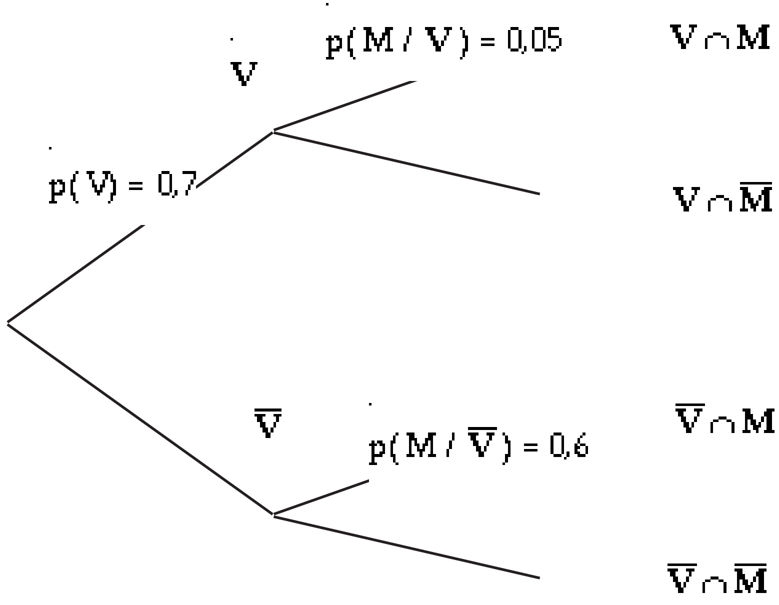
PARTIE A :

A la suite de la découverte dans un pays A des premiers cas d'une maladie contagieuse M, il a été procédé à une campagne de vaccinations, 70 % des habitants de A ont été vaccinés.

Une étude statistique a révélé que 5 % des vaccinés ont été touché à des degrés divers par la maladie, pourcentage élevé à 60% pour les non-vaccinés.

∂ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été touché par la maladie ;

∑ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été vacciné sachant qu'il a été atteint par la maladie ;



Solution :

On note M : « habitants touchés par la maladie » ; M : « habitants non touchés par la maladie » ; V : « habitants vaccinés » ; V : « habitants non vaccinés » ;

En hypothèse : p(V) = 0,7 ; p($^M/_V$) = 0,05 ; p($^M/_V$) = 0,6 ; on peut donc logiquement compte-tenu de ces données présenter un arbre dont le premier choix sera les deux évènements incompatibles V et V : p(V) = 1 - p(V) = 0,3.

∂ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été touché par la maladie ;

M : « habitants touchés par la maladie »

La formule suivante se justifie par le fait :

que l'intersection des évènements V ∩ M et V ∩ M est vide ,

que la réunion de ces mêmes évènements est M.

Puisque les évènements sont incompatibles donc :

$$p(M) = p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap M)$$

$$p(V \cap M) = p(V)\ p(M / V) = 0{,}7 \,.\, 0{,}05 = 0{,}035 \ ; \ p(\overline{V} \cap M) = p(\overline{V})\ p(M / \overline{V}) = 0{,}3 \,.\, 0{,}6 = 0{,}18$$

$$p(M) = p(V \cap M) + p(\overline{V} \cap M) = 0{,}035 + 0{,}18 = 0{,}215$$

∑ – Calculer la probabilité pour qu'un individu pris pas hasard ait été vacciné sachant qu'il a été atteint par la maladie ;

$$p(V)\ p(M / V) = p(V \cap M) = p(M)\ p(V / M) = 0{,}035 = 0{,}215\ p(V / M)$$

$^V/_M$: « habitants vaccinés sachant qu'il a été atteint par la maladie »

p($^V/_M$) ≈ 0,16.

PARTIE B :

Les séquelles laissées par la maladie M sont variés, mais on admet que 2% des individus ont subi des lésions de la vue.

LOI BINOMIALE

On réalise une enquête sur 100 anciens malades d'un secteur donné. On désigne par X la variable aléatoire qui prend pour valeurs le nombre d'individus souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon. On suppose que la population du pays est suffisamment importante pour que X suive une loi binomiale.

∂ – Montrer que l'on peut approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre . Calculer la probabilité pour qu'au cours de cette enquête, on découvre qu'il y ait au moins une personne souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon ;

∑ – On suppose désormais que la taille de la population soit N ; quel est la plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$?

Solution :

∂ – Montrer que l'on peut approcher cette loi binomiale par une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre . Calculer la probabilité pour qu'au cours de cette enquête, on découvre qu'il y ait au moins une personne souffrant de lésions de la vue dans cet échantillon ;

Chaque test effectué sur un individu de l'échantillon conduit à 2 échéances contradictoires : lésion M avec la probabilité p = 0,02 ou non lésion M avec la probabilité q = 1 - 0,02 = 0,98.

Dire que l'effectif de la population, n = 100 , est grand permet d'assimiler l'échantillonnage à des tirages avec remise, donc des épreuves répétées indépendantes, permet d'affirmer que la variable aléatoire X, qui prend pour valeur k le nombre de personnes atteints de lésions, suit la loi binomiale B (100 , 0,02).

E(X)=0,02 x 100 = 2 . Puisque : n = 100, p = 0,02 , np=2 on peut approcher la loi binomiale par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 2$.

E_1 :« au moins une personne souffrant de lésions » ; $p(E_1) = p(X \geq 1)$;

E_0 : « aucune personne ne souffre de lésion » ; $p(E_0) = p(X = 0)$

$p(E_1) = p(X \geq 1) = 1 - p(X= 0) = 1 - 0,135 = 0,865$

∑ – Quel est la plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$?

Puisque X suit la loi Binomiale $p(X = 0)= 0,98^N$

Résolutionde l'équation $p(X \geq 1) = 1 - p(X= 0) = 1 - 0,98^N \geq 0,95$

$1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $1 - 0,95 \geq 0,98^N$; $1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $0,05 \geq 0,98^N$;

$1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $\ln 0,05 \geq N \ln 0,98$;

Puisque ln 0,98 est négatif donc:

$1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $N \geq \ln 0,05 / \ln 0,98$;

$1 - 0,98^N \geq 0,95$ équivalent à $N \geq 148,3$;

La plus petite valeur de N tel que $p(X \geq 1) \geq 0,95$ est N = 149