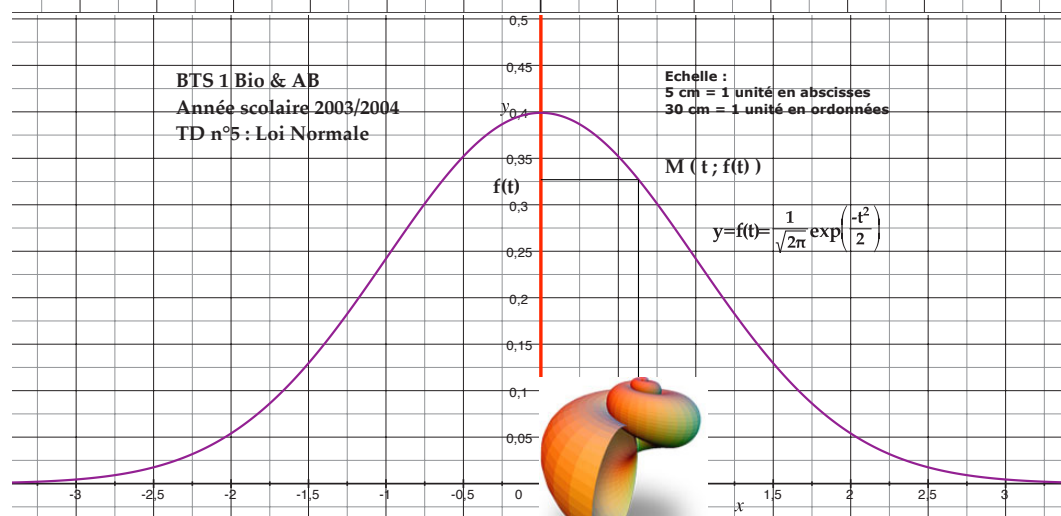
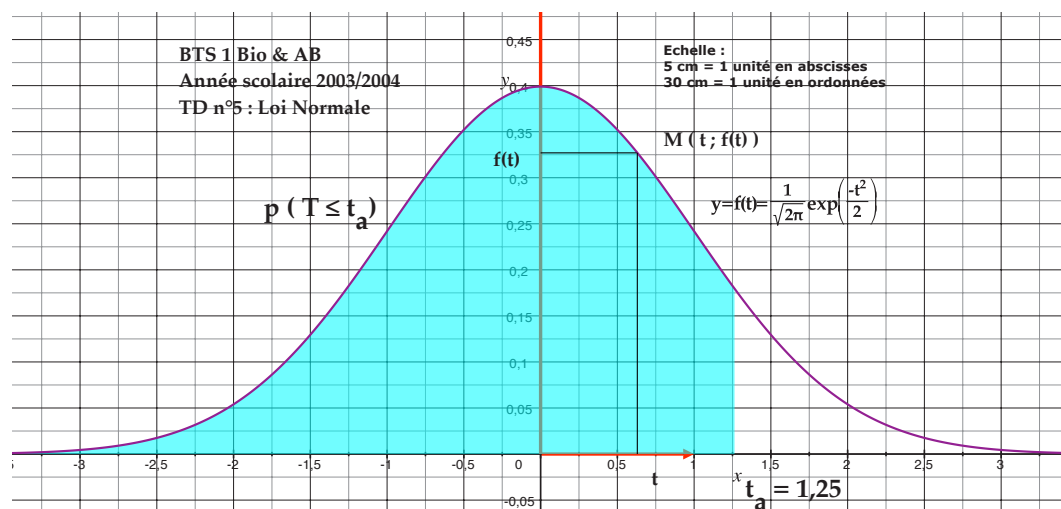


LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

I – DÉFINITIONS :

- ☼ Considérons la variable aléatoire T qui admet f pour fonction de répartition :
Sachant que $E(T) = 0$ et $\sigma(T) = 1$



T est appelée variable normale centrée et réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$.

Curvus Pro X

Td n°5 ; BTS 1 AB ; Année scolaire 2007/2008

Le 6 Février 2008

IV – PROPRIÉTÉS - EXEMPLES:

- ☼ **Définition :** si $t \geq 0$; $p(T \leq t) = \Pi(t)$
La valeur de $\Pi(t)$ est obtenue par lecture directe dans la table.

- ☼ – Calculer et représenter : $p(T \leq 1,67)$

$$\Rightarrow p(T \leq 1,67) =$$

☼ Propriété 2 :

si $t \geq 0$; $p(T \geq t) = 1 - \Pi(t)$

Par définition de la probabilité :

$$p(T \leq t) + p(T \geq t) = 1$$

- ☼ – Calculer et représenter : $p(T \geq 1,25)$

$$\Rightarrow p(T \leq 1,25) + p(T \geq 1,25) = 1$$

$$p(T \geq 1,25) =$$

☼ Propriété 3 :

si $t \leq 0$; $p(T \leq t) = 1 - \Pi(-t)$

Par symétrie de la courbe :

$$p(T \leq t) = p(T \geq -t) \text{ et } -t > 0$$

- ☼ – Calculer et représenter : $p(T \leq -1,67)$

$$\Rightarrow p(T \leq -1,67) = p(T \geq 1,67)$$

$$p(T \leq -1,67) =$$

☼ Définition : si $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$;

$$p(t_1 \leq T \leq t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$$

$$p(-t \leq T \leq t) = \Pi(t) - \Pi(-t)$$

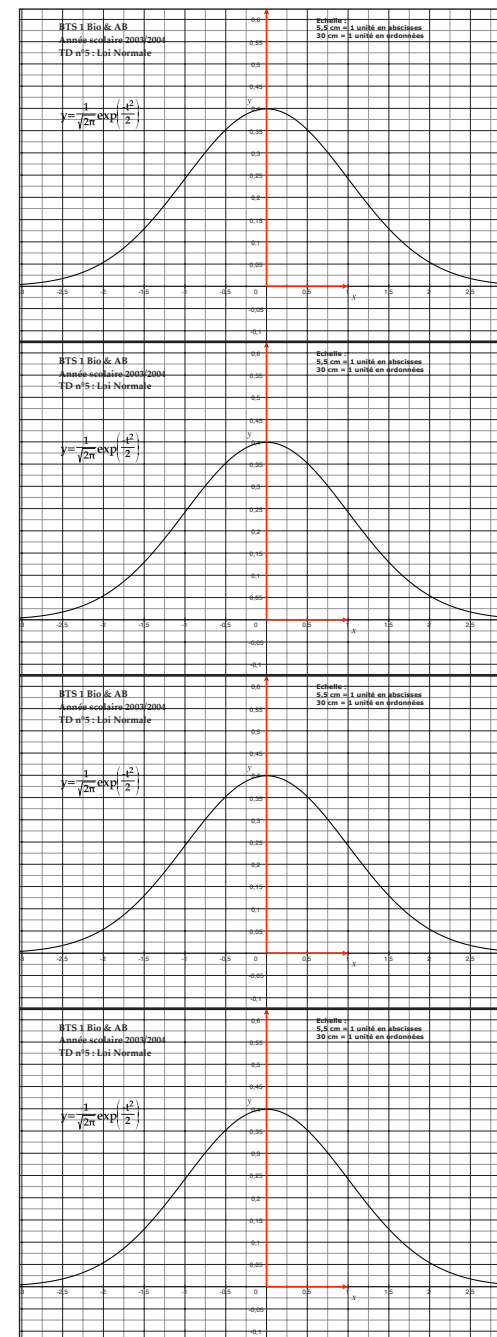
- ☼ – Calculer et représenter :

$$p(-1,25 \leq T \leq 1,25) = \Pi(1,25) - \Pi(-1,25)$$

☼ Remarque :

$$p(-t \leq T \leq t) = (\Pi(t) - 1/2) + (\Pi(t) - 1/2)$$

par symétrie de la courbe



LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

Td n°5 ; BTS 1 AB ; Année scolaire 2007/2008

Le 6 Février 2008

IV – PROPRIÉTÉS - EXEMPLES:

☼ **Définition :** si $t \geq 0$; $p(T \leq t) = \Pi(t)$

La valeur de $\Pi(t)$ est obtenue par lecture directe dans la table.

☞ – Calculer et représenter : $p(T \leq 1,67)$

☞ $p(T \leq 1,67) = 0,9525$

☼ **Propriété 2 :**

si $t \geq 0$; $p(T \geq t) = 1 - \Pi(t)$

Par définition de la probabilité :

$p(T \leq t) + p(T \geq t) = 1$

☼ – Calculer et représenter : $p(T \geq 1,25)$

☞ $p(T \leq 1,25) + p(T \geq 1,25) = 1$

$p(T \geq 1,25) = 1 - p(T \leq 1,25)$

$p(T \geq 1,25) = 1 - \Pi(1,25)$

$p(T \geq 1,25) = 1 - 0,8944$

☼ **Propriété 3 :**

si $t \leq 0$; $p(T \leq t) = 1 - \Pi(-t)$

Par symétrie de la courbe :

$p(T \leq t) = p(T \geq -t)$ et $-t > 0$

☞ – Calculer et représenter : $p(T \leq -1,67)$

☞ $p(T \leq -1,67) = p(T \geq 1,67)$

$p(T \leq -1,67) = 1 - \Pi(1,67)$

$p(T \leq -1,67) = 1 - 0,9525$

$p(T \leq -1,67) = 0,0475$

☼ **Définition :** si $t_1 \geq 0$ et $t_2 \geq 0$;

$p(t_1 \leq T \leq t_2) = \Pi(t_2) - \Pi(t_1)$

☞ – Calculer et représenter :

$p(-1,25 \leq T \leq 1,25) = \Pi(1,25) - p(T \leq -1,25)$

$p(-1,25 \leq T \leq 1,25) = \Pi(1,25) - (1 - \Pi(1,25))$

$p(-1,25 \leq T \leq 1,25) = 2\Pi(1,25) - 1$

$p(-1,25 \leq T \leq 1,25) = 2(0,8944) - 1$

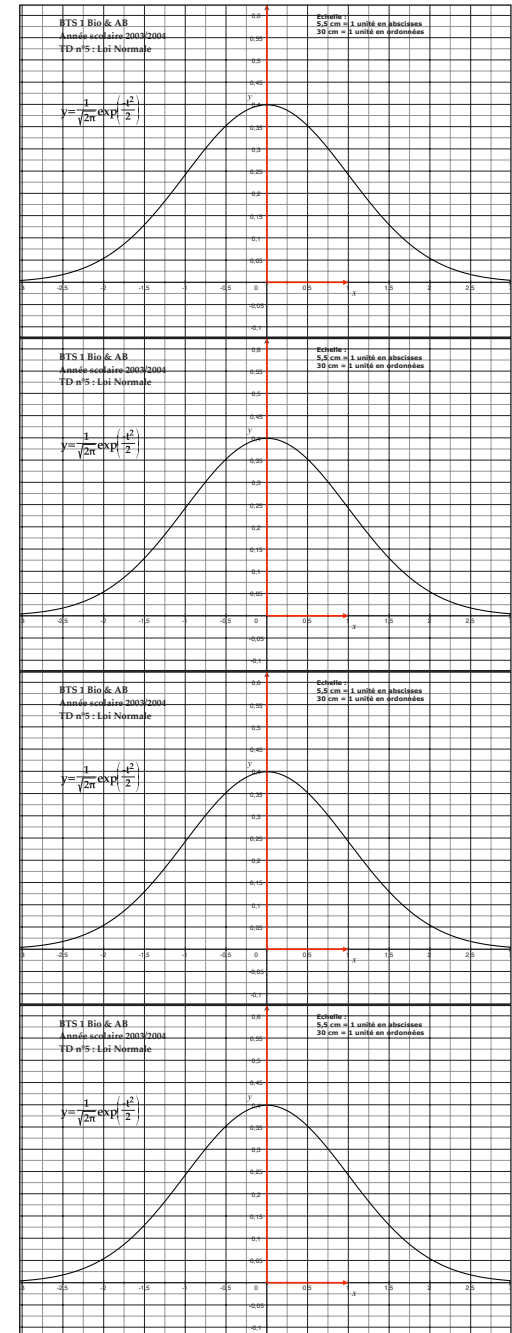
$p(-1,25 \leq T \leq 1,25) = 1,7888 - 1$

$p(-1,25 \leq T \leq 1,25) = 0,7888$

☞ **Remarque :**

$p(-t \leq T \leq t) = (\Pi(t) - 1/2) + (\Pi(t) - 1/2)$

par symétrie de la courbe



LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

IV – EXERCICES:

✿ – Calculer et représenter :
 $p(-1 \leq T \leq 1)$

✿ $p(-1 \leq T \leq 1) =$

✿ – Calculer et représenter :
 $p(-2 \leq T \leq 2)$

✿ $p(-2 \leq T \leq 2) =$

✿ – Calculer et représenter :
 $p(-3 \leq T \leq 3)$

✿ $p(-3 \leq T \leq 3) =$

✿ – Résoudre les équations et représenter :

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,5$$

$$t_\alpha =$$

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,90$$

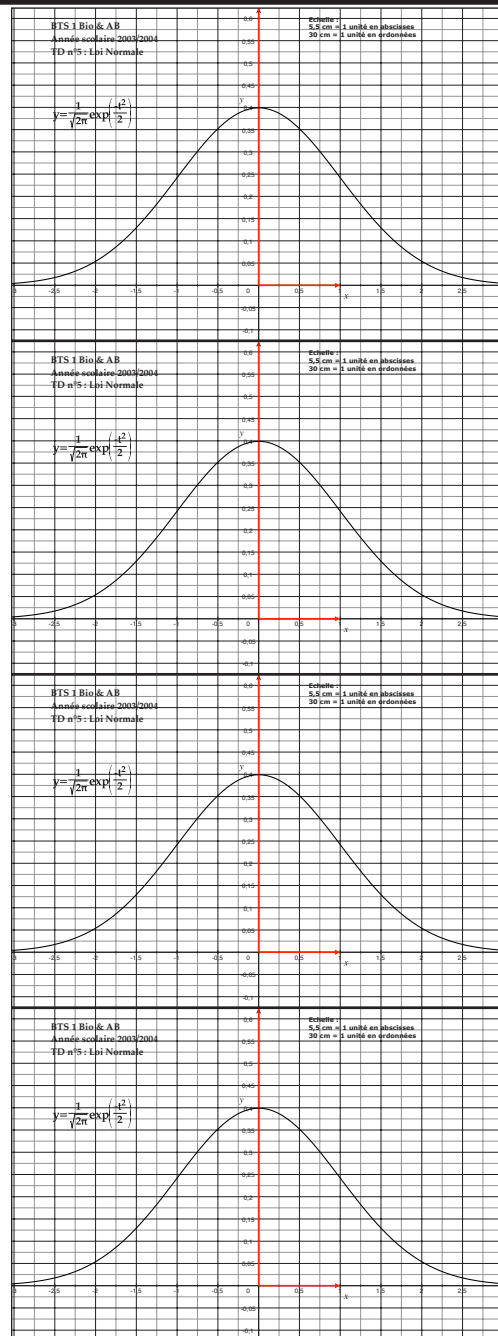
$$t_\alpha =$$

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,95$$

$$t_\alpha =$$

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,99$$

$$t_\alpha =$$



Td n°5 ; BTS 1 AB ; Année scolaire 2007/2008

Le 6 Février 2008

Résoudre l'équation
 $p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = \alpha$
 pour $t_\alpha > 0$:

✿ – Calculer t_α tel que :
 $p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,50$

✿ $t_\alpha =$

✿ – Calculer t_α tel que :
 $p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,90$

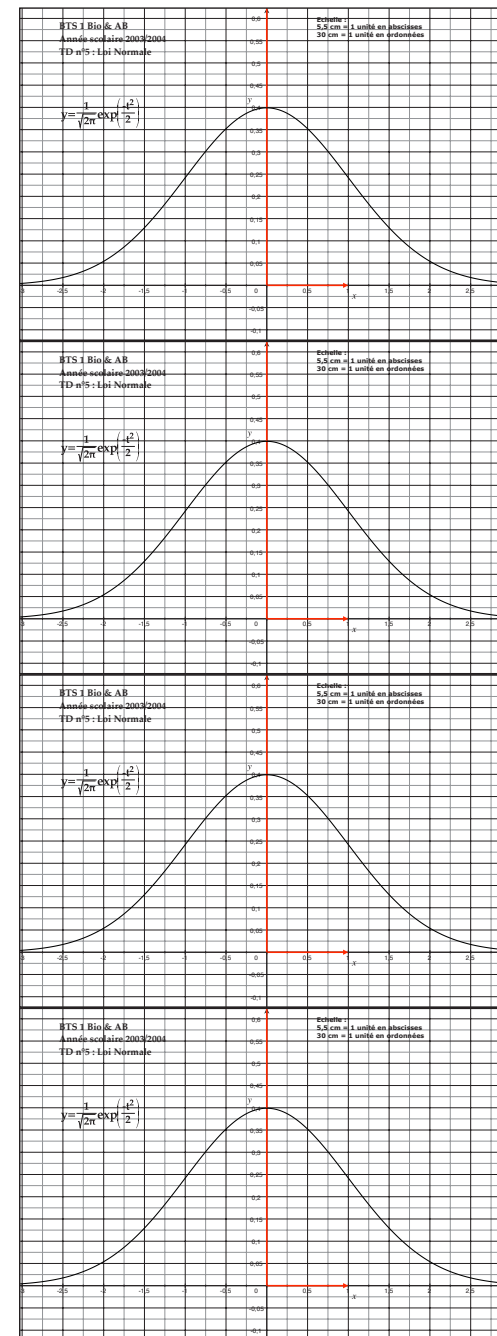
✿ $t_\alpha =$

✿ – Calculer t_α tel que :
 $p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,95$

✿ $t_\alpha =$

✿ – Calculer t_α tel que :
 $p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,99$

✿ $t_\alpha =$



LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

IV – EXERCICES:

✿ – Calculer et représenter :

$$p(-1 \leq T \leq 1)$$

$$p(-1 \leq T \leq 1) = 2 \Pi(1) - 1$$

$$p(-1 \leq T \leq 1) = 2 \times 0,8413 - 1$$

$$p(-1 \leq T \leq 1) = 1,6826 - 1$$

$$\text{✿ } p(-1 \leq T \leq 1) = 0,6826$$

✿ – Calculer et représenter :

$$p(-2 \leq T \leq 2)$$

$$p(-2 \leq T \leq 2) = 2 \Pi(2) - 1$$

$$p(-2 \leq T \leq 2) = 2 \times 0,9772 - 1$$

$$p(-2 \leq T \leq 2) = 1,9544 - 1$$

$$\text{✿ } p(-2 \leq T \leq 2) = 0,9544$$

✿ – Calculer et représenter :

$$p(-3 \leq T \leq 3)$$

$$p(-3 \leq T \leq 3) = 2 \Pi(3) - 1$$

$$p(-3 \leq T \leq 3) = 2 \times 0,99865 - 1$$

$$p(-3 \leq T \leq 3) = 1,9973 - 1$$

$$\text{✿ } p(-3 \leq T \leq 3) = 0,9973$$

✿ – Résoudre les équations et représenter :

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,5$$

$$t_\alpha = 0$$

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,90$$

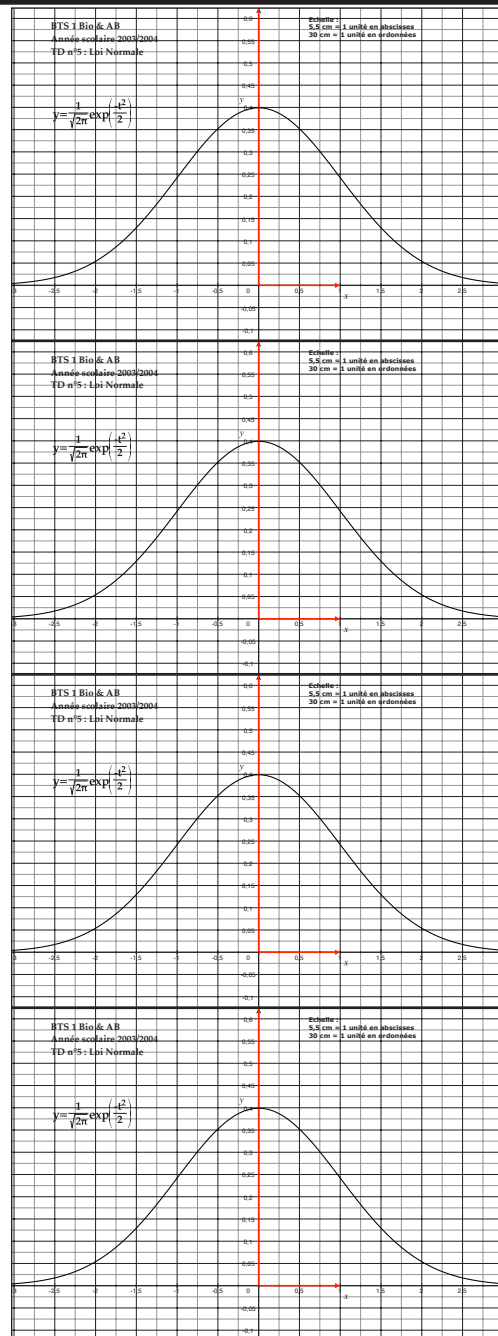
$$t_\alpha = 1,2815$$

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,95$$

$$t_\alpha = 1,6448$$

$$p(T \leq t_\alpha) = 0,99$$

$$t_\alpha = 2,3263$$



Td n°5 ; BTS 1 AB ; Année scolaire 2007/2008 Le 6 Février 2008

Résoudre l'équation $p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = \alpha$ pour $\alpha > 0$:

✿ – Calculer x tel que :

$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,50$$

$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 2 \Pi(t_\alpha) - 1 = 0,5$$

$$\Pi(t_\alpha) = (0,5 + 1)/2$$

$$\Pi(t_\alpha) = (1,5)/2 = 0,75$$

$$\text{✿ } t_\alpha = 0,6748$$

✿ – Calculer x tel que :

$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,90$$

$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 2 \Pi(t_\alpha) - 1 = 0,90$$

$$\Pi(t_\alpha) = (0,90 + 1)/2$$

$$\Pi(t_\alpha) = (1,9)/2 = 0,95$$

$$\text{✿ } t_\alpha = 1,6448$$

✿ – Calculer x tel que :

$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,95$$

$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 2 \Pi(t_\alpha) - 1 = 0,95$$

$$\Pi(t_\alpha) = (0,95 + 1)/2$$

$$\Pi(t_\alpha) = (1,95)/2 = 0,975$$

$$\text{✿ } t_\alpha = 1,9599$$

✿ – Calculer x tel que :

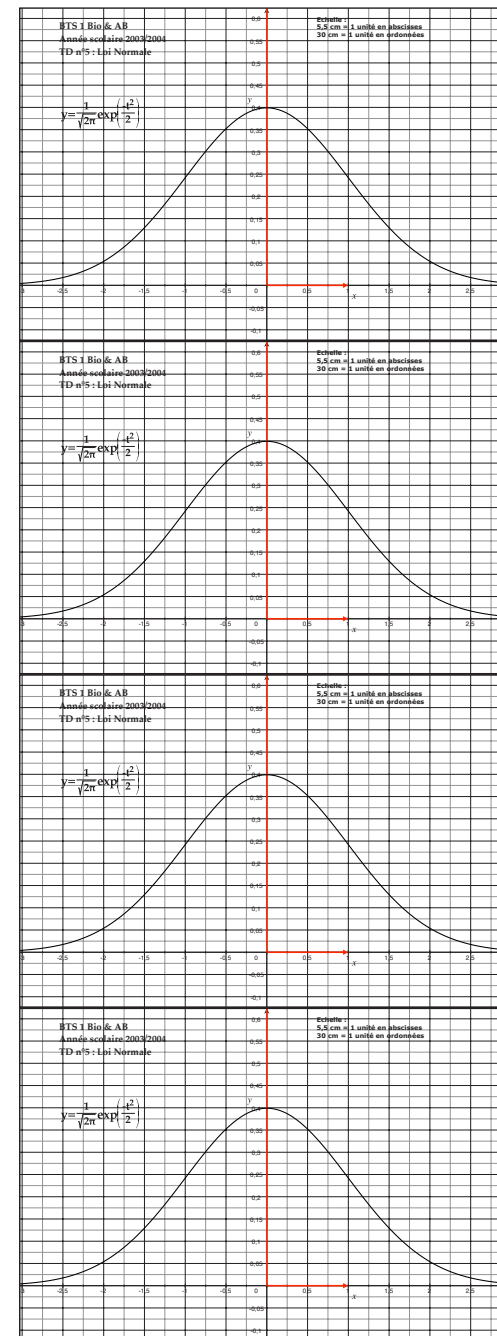
$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 0,99$$

$$p(-t_\alpha \leq T \leq t_\alpha) = 2 \Pi(t_\alpha) - 1 = 0,99$$

$$\Pi(t_\alpha) = (0,99 + 1)/2$$

$$\Pi(t_\alpha) = (1,99)/2 = 0,995$$

$$\text{✿ } t_\alpha = 2,5758$$



LOI NORMALE DE PARAMÈTRES m et σ

Td n°5 ; BTS 1 AB ; Année scolaire 2007/2008

Le 6 Février 2008

I – CONTEXTE :

⑩ La Loi normale ou Loi de Gauss ou Loi de Laplace-Gauss, s'applique à " une variable aléatoire continue dépendant de nombreux paramètres indépendants, dont les effets s'additionnent et dont aucun n'est prépondérant " Conditions de Borel:

✿ Elle est donc naturellement le modèle mathématique des phénomènes dont les causes sont à la fois nombreuses et mal connues, sans qu'on puisse détecter entre elles une prépondérance.

Ce sera le cas de phénomènes soumis à des perturbations : température, hygrométrie, pression atmosphérique, vibrations, usure d'outillage, imperfection des opérateurs.

✿ Dans ces domaines on est amené à étudier des variables aléatoires pouvant prendre, au moins théoriquement, n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$ ou dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

✿ Prenons l'exemple de la variable aléatoire X mesurant la durée de bon fonctionnement, en jours, d'un équipement particulier fabriqué en grandes séries, donc prenant ses valeurs sur $[0, +\infty[$.

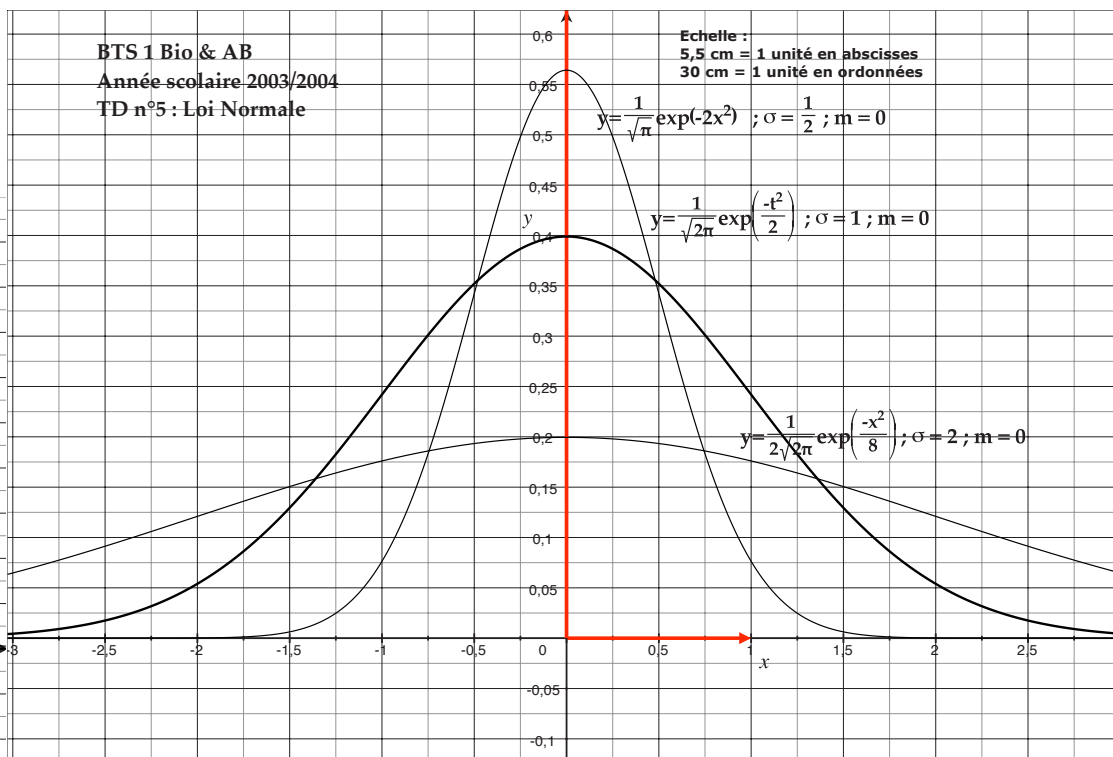
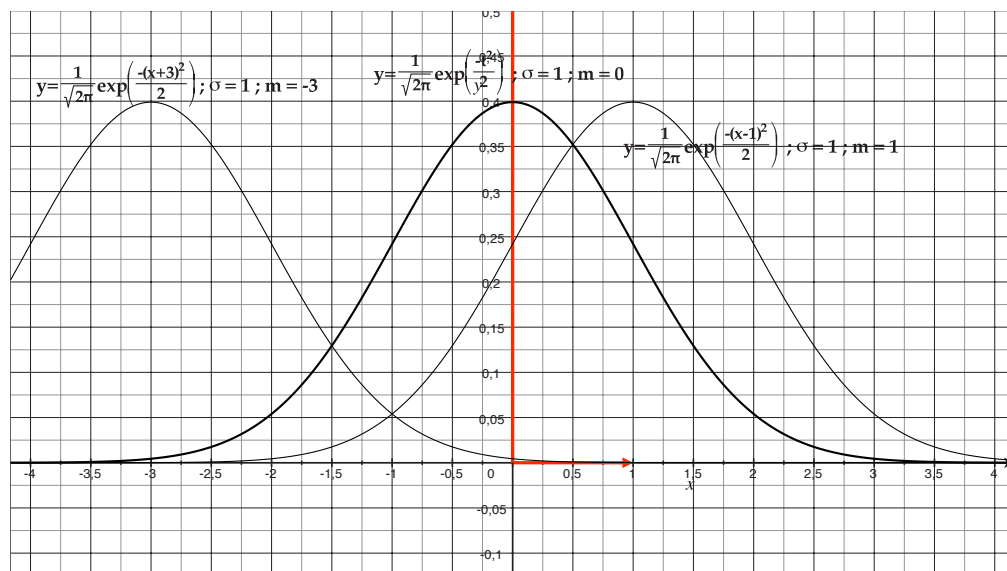
✿ Pour une telle variable aléatoire, les événements intéressants ne sont pas du type $X = 400$ ou $X = 271,35$ mais plutôt $X \leq 400$ ou $X > 1\,000$ ou $400 \leq X \leq 1\,200$.

✿ Les événements privilégiés sont des intervalles : « bon fonctionnement d'un appareil pendant au moins 1 000 jours ». Et de calculer leur probabilité.

✿ C'est la donnée de la densité de probabilité de la variable aléatoire X qui permet de définir ses propriétés.

II – DÉFINITIONS:

On dit que la variable aléatoire X suit la Loi normale de paramètres m et σ notée $N(m, \sigma)$ quand sa densité de probabilité est la fonction f définie par :



LOI NORMALE DE PARAMÈTRES m et σ

Dans ce cas : $E(x) = m$, $\sigma(X) = \sigma$

III – RELATION AVEC LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE :

Soit une variable aléatoire X , prenant les valeurs x , suivant la Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$. L'étude se ramène à celle d'une variable aléatoire T normale centrée réduite ;



i.scool

