# BTS MÉTIERS DE L'EAU 1997

**Partie B :** *Etude théorique.*

A la suite de violents orages, des eaux polluées à 4% par des triazines (pesticides très utilisés), se déversent dans un bassin aménagé pour la baignade. Un système d'évacuation permet de maintenir dans ce bassin un volume constant de 3 000 litres d'eau.

On admet que y le volume de triazines dans l'eau du bassin à l'instant est une fonction du temps t ( exprimé en heures ), $t \geq 0$ , est solution de l'équation différentielle ( $E_1$ ) :

$$\left(E_1\right) : \frac{dy}{dt} + 8.10^{-2}\, y\left(t\right) = 12 \text{ ou encore } \left(E_1\right) : y' + 8.10^{-2}\, y\left(t\right) = 12 ;$$

❶ Résoudre l'équation :

$$\left(E_0\right) : y' + 0{,}08\, y = 0$$

❷ Résoudre l'équation ( $E_1$ ) :

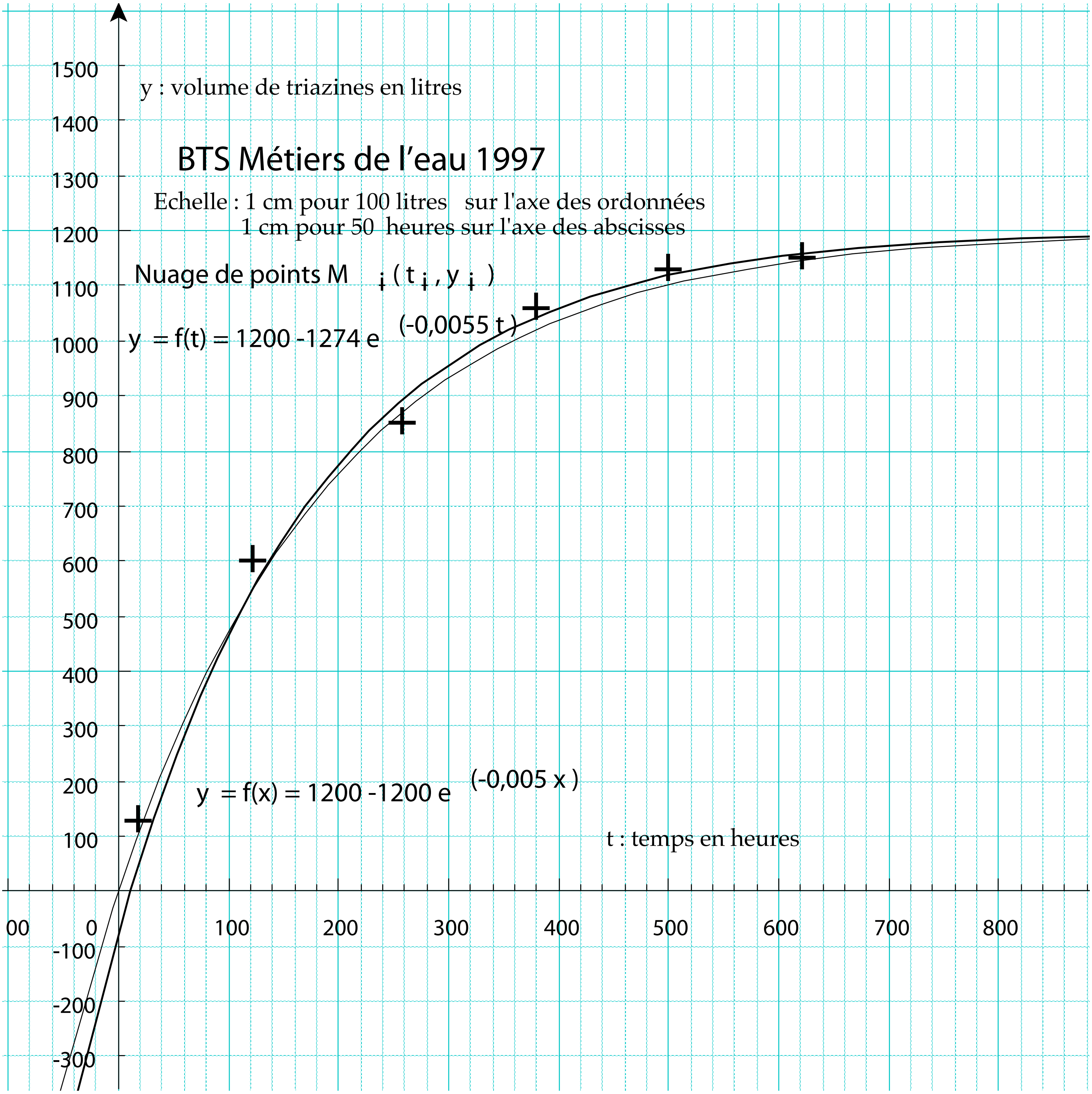
❸ On suppose qu'à l'instant $t = 0$ le volume de triazines dans l'eau du bassin est nul. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle, satisfaisant à cette condition et montrer que l'on a :

$$y = 150\left(1 - e^{-0{,}08t}\right)$$

❹ Etudier les variations de y sur $[\, 0 ; +\infty\, [$ ;

❺ Tracer la courbe représentative de s dans un repère orthogonal ( unités graphiques :2 cm pour 1 h sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 10 litres sur l'axe des ordonnées ) le même repère qu' à la question ❶ partie A ;

❻ Les baigneurs peuvent souffrir d'affections cutanées dès que le taux de triazines de l'eau du bassin est supérieur à 2 %. déterminer l'instant auquel ce taux est atteint.


y : volume de triazines en litres
BTS Métiers de l'eau 1997
Echelle : 1 cm pour 100 litres sur l'axe des ordonnées
1 cm pour 50 heures sur l'axe des abscisses
Nuage de points M i ( t i , y i )
y = f(t) = 1200 -1274 e (-0,0055 t )
y = f(x) = 1200 -1200 e (-0,005 x )
t : temps en heures
1500
1400
1300
1200
1100
1000
900
800
700
600
500
400
300
200
100
-100
-200
-300
00
0
100
200
300
400
500
600
700
800

**Partie B :** *Etude théorique.*

*On admet que y le volume de triazines dans l'eau du bassin à l'instant est une fonction du temps t ( exprimé en heures ), t ≥ 0 , est solution de l'équation différentielle ( $E_0$ ) :*

$$(E_0) : \frac{dy}{dt} + 5.10^{-3}\, y = 6 \text{ ou encore } (E_0) : y'(t) + 5.\ 10^{-3}\, y(t) = 6$$

❶ *Résoudre l'équation ( $E_1$ ) :* $(E_1) : y'(t) + 5.\ 10^{-3}\, y(t) = 0$

☞ La solution générale de l'équation ($E_1$) : y'(t) + 0,005 y(t) = 0 est l'ensemble des fonctions définies sur [ 0 ; + ∞ [ par $y(t) = C\, e^{-0,005t}$ où C réel.

❷ *Résoudre l'équation ( $E_0$ ) :*

Recherche d'une solution particulière constante de ($E_0$) en posant pour tout t de [ 0 ; + ∞ [ f(t) = k ;
Ainsi : f(t) = k solution de ($E_0$) équivalent à : f(t) = k , f'(t) = 0 , f'(t) + 0,005 f(t) = 6 ;
f(t) = k solution de ($E_0$) équivalent à : 0,005 k = 6 , f'(t) = 0 , f'(t) + 0,005 f(t) = 6 ;
☞ La solution particulière de l'équation ($E_0$) : y'(t) + 0,005 y(t) = 6 est l'ensemble des fonctions définies sur [ 0 ; + ∞ [ par f(t) = 6 / 0,005 = 1200 .

☞ La solution générale de l'équation ($E_0$) : y'(t) + 0,005 y(t) = 6 est sur [ 0 ; + ∞ [ la somme de la solution générale de ($E_1$) et de la solution particulière de ($E_0$) ayant pour expression $y(t) = C\, e^{-0,005t} + 1200$ où C réel.

❸ *On suppose qu'à l'instant t = 0 le volume de triazines dans l'eau du bassin est nul. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle, satisfaisant à cette condition et montrer que l'on a :*

La solution particulière de y qui vérifie la condition initiale y(0) = 0,12 est :
☞ pour t = 0 $y(0) = 0 = C\, e^{-0,01\ 0} + 1200$ ; donc 0 = C + 1200, donc C = - 1200 ;
☞ La solution particulière de l'équation($E_0$) est la fonction définie sur [ 0 ; + ∞ [ par $y(t) = -1200\, e^{-0,005t} + 1200 =$ $y(t) = 1200\,(1 - e^{-0,005t})$ .

❹ *Etudier les variations de s sur [ 0 ; + ∞ ] :*

<u>Etude de la limite :</u>

$$\text{puisque } \lim_{t \to +\infty} -1200\, e^{-0,01\,t} = 0 \quad \text{donc } \lim_{t \to +\infty} y(t) = 1200$$

La courbe représentative de la fonction y admet pour asymptote la droite d'équation y = 1200 quand t tend vers + l'infini.

<u>Calcul de la dérivée :</u>

Par définition de l'équation ($E_0$) : $y'(t) = -0,005\, y(t) + 6 = -0,005\,(1200\,(1 - e^{-0,005t})) + 6 = -6 + 0,005\, e^{-0,005t} + 6$

$y'(t) = -0,005\, e^{-0,005t}$ .

<u>Etude du signe de la dérivée :</u>

Par définition de la fonction exponentielle $e^{-0,005t} > 0$ pour tout t réel ; donc y'(t) > 0 pour tout t réel.

<u>Tableau de variations :</u>

Puisque y'(t) > 0 pour tout t appartenant [ 0 , + ∞ ] donc y est strictement croissante sur [ 0 , + ∞ ] ;

| t | 0 | +∞ |
|---|---|---|
| y'(t) | positif | |
| y(t) | 0 ↗ | 1200 |

❺ *Tracer la courbe représentative de s dans un repère orthogonal ( unités graphiques : 2 cm pour 100 h sur l'axe des abscisses, 1 cm pour 100 litres sur l'axe des ordonnées ).*

❻ *Les baigneurs peuvent souffrir d'affections cutanées dès que le taux de triazines de l'eau du bassin est supérieur à 2 %. déterminer l'instant auquel ce taux est atteint.*

Résoudre l'inéquation suivante :

$$y(t) = 1200\,(1 - e^{-0,005t}) \geq 600 \text{ équivalent à } 1 - e^{-0,005t} \geq \frac{600}{1200}$$

$$y(t) = 1200\,(1 - e^{-0,005t}) \geq 600 \text{ équivalent à } 1 - e^{-0,005t} \geq \frac{1}{2}$$

$$y(t) = 1200\,(1 - e^{-0,005t}) \geq 600 \text{ équivalent à } \frac{1}{2} \geq e^{-0,005t}$$

$$y(t) = 1200\,(1 - e^{-0,005t}) \geq 600 \text{ équivalent à } \ln\left(\frac{1}{2}\right) \geq -0,005t$$

$$y(t) = 1200\,(1 - e^{-0,005t}) \geq 600 \text{ équivalent à } -\ln 2 \geq -0,005t$$

$$y(t) = 1200\,(1 - e^{-0,005t}) \geq 600 \text{ équivalent à } t \geq 200 \ln 2$$

Le taux de2 % est atteint au bout de 138,6 h.