

BTS 1 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°11 : Loi Normale Loi Normale Centrée Réduite
Exercices



Biochimie 1989

1) Au cours d'une répartition de pénicilline en flacons sur une machine automatique, on prélève à intervalles plus ou moins réguliers, un flacon dont on pèse le contenu, au dixième de milligramme. On prélève ainsi un échantillon de 250 flacons dont les masses des contenus exprimées en mg se répartissent en 20 classes comme suit :

Classes	Effectifs
[116,5 ; 117,5[	2
[117,5 ; 118,5[	3
[118,5 ; 119,5[	4
[119,5 ; 120,5[	10
[120,5 ; 121,5[	10
[121,5 ; 122,5[	16
[122,5 ; 123,5[	20

Classes	Effectifs
[123,5 ; 124,5[	23
[124,5 ; 125,5[	21
[125,5 ; 126,5[	30
[126,5 ; 127,5[	25
[127,5 ; 128,5[	22
[128,5 ; 129,5[	14
[129,5 ; 130,5[	15

Classes	Effectifs
[130,5 ; 131,5[	10
[131,5 ; 132,5[	7
[132,5 ; 133,5[	5
[133,5 ; 134,5[	5
[134,5 ; 135,5[	4
[135,5 ; 136,5[	4

On appelle X la variable statistique qui, à tout flacon, associe la masse de son contenu, exprimée en milligrammes.

a) Calculer la moyenne arithmétique $\bar{x}$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

($\bar{x}$ et $\sigma(X)$ seront exprimés à 10^{-3} près par défaut).

b) Quel est le pourcentage de flacons ayant un contenu dont la masse est de moins de 125,5 mg ?

2) Cet échantillon a permis de prendre comme estimation des paramètres de la population correspondante : la moyenne $\mu = 126$ et l'écart-type $\sigma = 4$.

Soit X la variable aléatoire qui, à tout flacon, associe la masse de son contenu, exprimée en milligrammes. On suppose que X suit une loi normale.

a) Calculer les probabilités : $P(X < 125)$ $P(118 < X < 134)$ $P(X > 129,2)$.

b) On a utilisé un sel de pénicilline titrant 1600 unités au milligramme. L'activité moyenne par flacon est 201 600 unités. Pour obéir aux prescriptions des normes en vigueur, l'activité trouvée par flacon doit être au moins de 95 pour cent de celle annoncée sur l'étiquette, soit 200 000 unités.

i) Quelle est la masse u du contenu du flacon correspondant à cette activité minimum ?

(On exprimera la réponse à 10^{-3} près par défaut).

ii) Quelle est la proportion moyenne de flacons dans la population ayant une masse inférieure à cette masse u ? (C'est-à-dire calculer $P(X < u)$).

ii) $P(X < 118,75) = P(T < -1,8125) = 1 - \Phi(1,8125) \approx 1 - 0,965 \approx 0,035$. 3,5 % des flacons ont une masse inférieure à 118,75 mg.

Solution

1.a. En prenant pour valeurs les centres de chaque classe, avec une calculatrice, on obtient : $\bar{x} = 126,172$ mg, $\sigma(X) \approx 3,985$ mg et $V(X) \approx 15,886$ mg² (au millième par défaut, un regroupement par classes d'amplitude 1, ne permet pas une telle précision!).

1.b. 109 flacons ont un contenu de masse inférieure à 125,5 mg, soit 43,6 %.

2.a. Soit $T = \frac{X - 126}{4}$ la variable centrée réduite associée à X et Φ la fonction de répartition de la loi normale.

$$P(X < 125) = P(T < -0,25) = \Phi(-0,25) = 1 - \Phi(0,25) \approx 1 - 0,5987 \approx 0,4013.$$

$$P(118 < X < 134) = P(-2 < T < 2) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 2\Phi(2) - 1 \approx 0,9544.$$

$$P(X > 129,2) = P(T > 0,8) = 1 - P(T \leq 0,8) = 1 - \Phi(0,8) \approx 1 - 0,7881 \approx 0,2119.$$

2.b. i) La masse u du contenu d'un flacon correspondant à l'activité minimale est égale à : $\frac{0,95 \times 200\,000}{1600}$ mg, soit 118,75 mg.

BTS 1 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°11 : Loi Normale Loi Normale Centrée Réduite
Exercices

Biochimie 1994

B

Les valeurs décimales approchées des résultats numériques seront données à 10^{-2} près.

On effectue des contrôles d'alcoolémie d'automobilistes dans une région donnée, un jour donné, pendant une période horaire donnée. Les statistiques permettent d'établir que la probabilité pour qu'un automobiliste choisi au hasard dans les conditions précédentes présente un contrôle positif est $\frac{1}{50}$.

Partie A.

Dans cette question, on considère un échantillon de la population constitué de 2000 automobilistes dont on veut contrôler le taux d'alcoolémie dans les conditions précédentes. On appelle X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre possible de contrôles positifs parmi ces 2000.

- 1) X suit une loi binomiale : en donner l'espérance mathématique et la variance.
- 2) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? Justifier.
- 3) En utilisant la loi normale de moyenne 40 et d'écart-type 6,26 :
 - a) Calculer les probabilités : $P(X \geq 36)$ et $P(33 \leq X \leq 43)$;
 - b) Déterminer une valeur approchée du réel a tel que $P(X \leq a) = 0,99$;
 Quelle est la plus grande valeur de l'entier naturel n que l'on peut en déduire, tel que $P(X \leq n) \leq 0,99$?

Partie B.

Dans une ville donnée de cette région, on effectue au hasard 200 contrôles de taux d'alcoolémie d'automobilistes, dans les conditions précédentes.

Les taux d'alcoolémie mesurés en $g.L^{-1}$ ont donné les résultats suivants :

Taux	$[0 ; 0,2[$	$[0,2 ; 0,4[$	$[0,4 ; 0,6[$	$[0,6 ; 0,8[$	$[0,8 ; 1[$	$[1 ; 1,2[$	$[1,2 ; 1,5[$	$[1,5 ; 2[$
Effectifs	42	78	52	19	4	2	2	1

- 1) Calculer les valeurs approchées de la moyenne $\bar{t}$ et de l'écart-type s du taux d'alcoolémie de cet échantillon.
- 2) Un contrôle est considéré comme positif si le taux d'alcoolémie mesuré est supérieur ou égal à $0,8g.L^{-1}$.
Calculer la fréquence de contrôles positifs de cet échantillon.
- 3) Cette fréquence permet-elle de conclure que l'échantillon est représentatif au seuil de risque de 5 % de l'ensemble des contrôles de la région, où l'on considère que la proportion des contrôles positifs est $\frac{1}{50}$?

Correction de Yates

Solution

A.1. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 2\,000$ et $p = \frac{1}{50}$: $X \sim B\left(2\,000, \frac{1}{50}\right)$.

Donc $E(X) = np = 40$ et $\text{Var}(X) = np(1-p) = 40 \times 0,98 = 39,2$.

2. Puisque $p \leq 0,5$ et $np \geq 5$ on peut approcher la loi de X par la loi normale de paramètres $\mu = 40$ et $\sigma = \sqrt{39,2} \approx 6,26$.

3. Soit X' l'approximation normale de X . La variable centrée réduite $T = \frac{X' - 40}{6,26}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, de fonction de répartition Φ . En utilisant la correction de continuité :

a. $P(X \geq 36) \approx P(X' \geq 35,5) \approx P(T \geq -0,72) = 1 - P(T < 0,72) \approx 0,2358$.

$P(33 \leq X \leq 43) \approx P(32,5 \leq X' \leq 43,5) \approx P(-1,20 \leq T \leq 0,56) = \Phi(0,56) - \Phi(-1,20)$
 $= \Phi(0,56) - (1 - \Phi(1,20)) \approx 0,5972$.

b. $P(X \leq a) \approx P(X' \leq a + 0,5) \approx P\left(T \leq \frac{a - 39,5}{6,26}\right) = \Phi\left(\frac{a - 39,5}{6,26}\right) = 0,99$.

Par conséquent, $\frac{a - 39,5}{6,26} \approx 2,33$ d'où l'on tire $a \approx 54,09$. On en déduit $n = 54$.

B.1. En prenant pour valeurs de la variable statistique les centres des classes, à l'aide d'une calculatrice, on obtient : $\bar{t} \approx 0,39 \text{ g.L}^{-1}$ et $s \approx 0,25 \text{ g.L}^{-1}$ au centième le plus proche.

2. Il y a 9 contrôles positifs ce qui correspond à une fréquence f égale à 4,5 % (notons que depuis 1996 le législateur a fixé le taux maximal d'alcoolémie au volant à $0,5 \text{ g.L}^{-1}$).

3. Il s'agit de comparer la fréquence théorique $p = 0,02$ et la fréquence observée $f = 0,045$.

Hypothèse nulle (H_0) : l'échantillon provient d'une population de proportion $p' = p$.

Hypothèse alternative (H_1) : $p' \neq p$ (test bilatéral). Seuil de risque : $\alpha = 0,05$.

Notons F la fréquence d'échantillon.

Sous l'hypothèse H_0 , $\sigma(F) = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0,02 \times 0,98}{200}} \approx 0,0099$. On supposera que la loi de F peut être approchée par une loi normale (ce qui est discutable!).

Première méthode : intervalle d'acceptation J_α de la fréquence observée $f = 0,045$.

$$J_\alpha = [p - t_\alpha \cdot \sigma(F), p + t_\alpha \cdot \sigma(F)] \approx [0,0006; 0,0394].$$

f n'appartient pas à J_α , on rejette l'hypothèse H_0 .

Deuxième méthode : comparaison de la valeur absolue de la différence centrée réduite

$t = \frac{f - p}{\sigma(F)}$ avec la valeur limite $t_\alpha = 1,96$.

Comme $t \approx 2,53$, on a $|t| > t_\alpha$: on rejette l'hypothèse H_0 .

BTS 1 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°11 : Loi Normale Loi Normale Centrée Réduite
Exercices

Biochimie 1993

Les individus d'une population donnée peuvent être atteints de deux maladies A et B .
 La probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population soit malade de A est 0,03.

La probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population soit malade de B est 0,05.

1) On sait que la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population soit malade de B sachant qu'il est malade de A est 0,6 et on choisit au hasard un individu dans cette population :

- Calculer la probabilité pour que cet individu soit malade à la fois de A et de B .
- Calculer la probabilité pour qu'il soit malade de A sachant qu'il est malade de B .
- Calculer la probabilité pour qu'il soit malade de A ou de B .

2) Dans cette question, on considère un échantillon de la population constitué de 10 000 personnes. Soit X la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de malades de A dans cette population.

- Déterminer la loi de probabilité de X : préciser ses paramètres.
- Par quelle loi normale peut-on approcher cette loi de probabilité ?
- En déduire $P(X < 250)$.

Solution

Notons respectivement A et B les événements « l'individu est atteint de la maladie A » et « l'individu est atteint de la maladie B ».

On a : $P(A) = 0,03$, $P(B) = 0,05$ et $P(B|A) = 0,6$.

1.a. $P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = 0,6 \times 0,03 = 0,018$.

b. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,018}{0,05} = 0,36$.

c. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,03 + 0,05 - 0,018 = 0,062$.

2. a. On suppose que les personnes de l'échantillon sont choisies de manière indépendante, la variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10000$ et $p = 0,03$: $X \sim B(10\,000 ; 0,03)$.

b. On peut approcher la loi de X par la loi normale de paramètres $\mu = E(X) = np = 300$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{300 \times 0,97} \approx 17$.

c. Soit X' l'approximation normale de X et $T = \frac{X' - 300}{17}$ la variable centrée réduite associée à X' . En utilisant la correction de continuité :

$$P(X < 250) \approx P(Y \leq 249,5) \approx P(T < -2,97) \approx \Phi(-2,97) \approx 1 - \Phi(2,97) \approx 0,0015.$$

(Φ étant la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.)

Correction de Yates

Biochimie 1998

E

Les résultats numériques seront arrondis au millième le plus proche.

Dans un pays d'Afrique, 15% de la population est atteinte du virus du sida.

Partie A.

La stratégie de dépistage met en place un test biologique qui doit être négatif si le sujet est sain, qui doit être positif si le sujet est contaminé.

La probabilité qu'un test soit positif sachant que le sujet est sain est 0,004.

La probabilité qu'un test soit négatif sachant que le sujet est contaminé est 0,024.

On choisit au hasard un individu de ce pays.

- 1) Calculer la probabilité que le test soit positif et l'individu sain.
- 2) Calculer la probabilité que le test soit négatif et l'individu contaminé.
- 3) En déduire la probabilité que le résultat soit erroné.

Partie B.

Une campagne de dépistage est mise en place sur un échantillon de 500 personnes prises au hasard dans la population. On suppose que l'effectif de la population est très grand.

On suppose que les risques d'erreur du test sont négligeables et on admet que la probabilité qu'un test réalisé sur une personne prise au hasard dans la population soit positif est 0,15.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tests positifs sur les 500 tests effectués.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X .
- 2) Par quelle loi normale peut-on approcher la loi définie ci-dessus ?
- 3) En utilisant cette loi normale, calculer la probabilité pour que plus de 80 tests se révèlent positifs.

Correction de Yates

Solution

A. Notons respectivement S et T les événements « le sujet étudié est sain » et « le test est positif ». D'après l'énoncé : $P(\bar{S}) = 0,15$, $P(T/S) = 0,004$ et $P(\bar{T}/\bar{S}) = 0,024$.

1. L'événement « le test est positif et le sujet est sain » est l'événement $T \cap S$.

Donc $P(T \cap S) = P(S) \times P(T/S) = (1 - P(\bar{S})) \times P(T/S) = 0,85 \times 0,004 \approx 0,003$.

2. L'événement « le test est négatif et l'individu est contaminé » est l'événement $\bar{T} \cap \bar{S}$.

Donc $P(\bar{T} \cap \bar{S}) = P(\bar{T}/\bar{S}) \times P(\bar{S}) = 0,024 \times 0,15 = 0,004$.

3. Le résultat est erroné si le test est positif alors que l'individu est sain ou si le test est négatif alors que le sujet est contaminé ; c'est donc l'événement $(T \cap S) \cup (\bar{T} \cap \bar{S})$.

Or les événements $T \cap S$ et $\bar{T} \cap \bar{S}$ sont disjoints car $(T \cap S) \cap (\bar{T} \cap \bar{S}) = \emptyset$.

Donc $P((T \cap S) \cup (\bar{T} \cap \bar{S})) = P(T \cap S) + P(\bar{T} \cap \bar{S}) \approx 0,003 + 0,004 = 0,007$.

B.1. Si l'on suppose les tirages indépendants, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 500$ et $p = 0,15$: $X \sim \mathcal{B}(500 ; 0,15)$.

$$E(X) = np = 75 \quad ; \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{63,75} \approx 7,98.$$

2. Cette loi binomiale $\mathcal{B}(500 ; 0,15)$ peut être approchée par la loi normale de paramètres $\mu = E(X) = 75$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{63,75} \approx 7,98$, notée $\mathcal{N}(75; 7,98)$.

3. Soit X' l'approximation normale de X et $T = \frac{X' - 75}{7,98}$ la variable aléatoire centrée

réduite associée à X' . T suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ de fonction de répartition Φ .

En utilisant la correction de continuité, on obtient :

$$P(X > 80) \approx P(X' \geq 80,5) \approx P(T \geq 0,69) = 1 - P(T < 0,69) = 1 - \Phi(0,69) \approx 0,245.$$

La probabilité que plus de 80 tests soient positifs est environ 0,245.

Biotechnologie 1989

Objet de l'exercice : évaluation d'un procédé de fabrication.

Un laboratoire veut fabriquer des pilules se composant de deux substances A et B . Pour chaque pilule de la fabrication on considère les masses a et b respectivement des substances A et B qui la constituent.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque pilule la masse a de la substance A et par Y la variable aléatoire qui associe à chaque pilule la masse b de la substance B . On suppose que ces deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent des lois normales de moyennes respectives : $m_x = 8,55 \text{ mg}$ et $m_y = 5,20 \text{ mg}$, et d'écart-types respectifs : $\sigma_x = 0,05 \text{ mg}$ et $\sigma_y = 0,05 \text{ mg}$.

1. Déterminer la probabilité $P(8,45 \leq X \leq 8,70)$.

2. Déterminer la probabilité $P(5,07 \leq Y \leq 5,33)$.

3. On impose les normes de fabrication suivantes : $8,45 \leq a \leq 8,70$ et $5,07 \leq b \leq 5,33$.

a) Calculer le pourcentage de pilules qui seront hors norme à la sortie de la chaîne de fabrication.

b) Peut-on alors retenir ce procédé de fabrication, sachant que le pourcentage de pilules défectueuses ne peut dépasser 1 % ?

Solution

1. On pose $T = \frac{X - 8,55}{0,05}$. T suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ de fonction de répartition Φ .

$P(8,45 \leq X \leq 8,7) = P(-2 \leq T \leq 3) = \Phi(3) - \Phi(-2) \approx 0,99865 - 0,02275 \approx 0,9759$.

2. On pose $T' = \frac{Y - 5,2}{0,05}$. T' suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ de fonction de répartition Φ .

$P(5,07 \leq Y \leq 5,33) = P(-2,6 \leq T' \leq 2,6) = 2\Phi(2,6) - 1 \approx 2 \times 0,99534 - 1 \approx 0,99068$.

3.a) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, donc :

$P((8,45 \leq X \leq 8,7) \text{ et } (5,07 \leq Y \leq 5,33)) = P(8,45 \leq X \leq 8,7) \cdot P(5,07 \leq Y \leq 5,33)$,
ce qui donne $P((8,45 \leq X \leq 8,7) \text{ et } (5,07 \leq Y \leq 5,33)) \approx 0,9759 \times 0,99068 \approx 0,9668$.

La proportion de pilules hors-norme est donc $1 - 0,9668 = 0,0332 = 3,32\%$.

b) On rejette ce procédé dont le pourcentage de pilules défectueuses dépasse 1 %.

Devoir en classe n°

Biotechnologie 1991

Le but de cet exercice est l'étude de l'effet d'une maladie sur une population.

Une étude statistique réalisée sur une population de 5 000 000 d'individus atteints de cette maladie a permis de montrer que 2 000 de ces individus sont morts de cette maladie, soit une proportion de 0,0004.

On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de décès dus à cette maladie sur un échantillon de taille n . On suppose qu'il y a indépendance des décès constatés, et que n reste inférieur ou égal à 100 000.

1. Déterminer la loi de probabilité de X . Préciser ses paramètres.
2. On extrait un échantillon de 10 000 individus de cette population.
 - a) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X .
 - b) Par quelle loi de probabilité peut-on approcher la loi précédente ?
 - c) Calculer la probabilité $P(1 \leq X \leq 8)$.
3. On considère un échantillon de 100 000 individus de cette population.
 - a) Par quelle loi normale peut-on approcher la loi de probabilité de X ?

On note m l'espérance mathématique de X .

- b) Déterminer le nombre a tel que : $P(m - a \leq X \leq m + a) = 0,95$.

En déduire le plus petit entier n_0 tel que : $P(m - n_0 \leq X \leq m + n_0) \geq 0,95$.

Solution

1. On répète n fois la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,0004$ (probabilité de réussite), de manière indépendante : la variable aléatoire X suit la loi binomiale $B(n, p)$.

2.a. $n = 10\,000$. $E(X) = np = 4$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{3,9984} \approx 1,9996$.

b. n est grand, p est très faible, on peut approcher la loi de X par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = E(X) = 4$.

c. $P(1 \leq X \leq 8) = P(X = 1) + P(X = 2) + \dots + P(X = 8)$

$$\approx e^{-\lambda} \left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \dots + \frac{\lambda^8}{8!} \right) \approx 0,960.$$

3.a. $n = 100\,000$. On peut approcher la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$, avec $m = E(X) = np = 40$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{39,984} \approx 6,32$.

b. Soit X' l'approximation normale de X et T la variable centrée réduite associée : $T = \frac{X' - m}{\sigma}$. Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

On a, avec la correction de continuité :

$$P(m - a \leq X \leq m + a) = P\left(\frac{-a - 0,5}{\sigma} \leq T \leq \frac{a + 0,5}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{a + 0,5}{\sigma}\right) - 1 = 0,95.$$

On en tire $\Phi\left(\frac{a + 0,5}{\sigma}\right) = 0,975 \approx \Phi(1,96)$, donc $\frac{a + 0,5}{\sigma} \approx 1,96$, ce qui donne :

$$a \approx 1,96\sigma - 0,5 \approx 11,89.$$

Le plus petit entier n_0 tel que $P(m - n_0 \leq X \leq m + n_0) \geq 0,95$ est l'entier qui suit a , donc $n_0 = 12$.

BTS 1 - Année Scolaire 2007-2008

Chapitre n°11 : Loi Normale Loi Normale Centrée Réduite

Exercices

Fait à Nantes le vendredi 22 février 2008 13:58:42