Q.I.
A.B.
98

Qualité dans les industries alimentaires et les bio-industries 1998

Le but de cet exercice est de comparer deux modes d'administration d'une même quantité de médicament à des bovins, soit par une injection intraveineuse, soit par une perfusion continue.

I. 1) Si on injecte $100mg$ d'un produit dans le sang, alors la quantité Q_1 de produit présente dans le sang à l'instant t, où t est exprimé en heures pour $t \geqslant 0$, vérifie l'équation différentielle (E_1) :

$$\frac{dQ_1}{dt} = -Q_1,$$

avec de plus la condition initiale : $Q_1(0) = 100$.
Résoudre cette équation différentielle sur $[0; +\infty[$.

2) Si on perfuse, pendant 4 heures, $25\,mg$ par heure du même produit, alors la quantité Q_2 de produit présente dans le sang à l'instant t, où t est exprimé en heures pour $0 \leqslant t \leqslant 4$, vérifie l'équation différentielle (E_2) :

$$\frac{dQ_2}{dt} + Q_2 = 25,$$

avec de plus la condition initiale : $Q_2(0) = 0$.
Résoudre cette équation différentielle sur $[0; +\infty[$.

II. Soient f_1 et f_2 les fonctions définies respectivement par :

$$f_1(t) = 100e^{-t} \quad \text{pour } t \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad f_2(t) = 25(1 - e^{-t}) \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 4.$$

1) Montrer que f_1 est décroissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et que f_2 est croissante sur $[0; 4]$.

2) Construire dans un même repère orthogonal les représentations graphiques de ces deux fonctions. On prendra $2\,cm$ pour une heure en abscisses et $1\,cm$ pour $5\,mg$ en ordonnées.

3) Sur quel intervalle a-t-on : $f_1(t) \geqslant f_2(t)$?
a) graphiquement,
b) par le calcul.

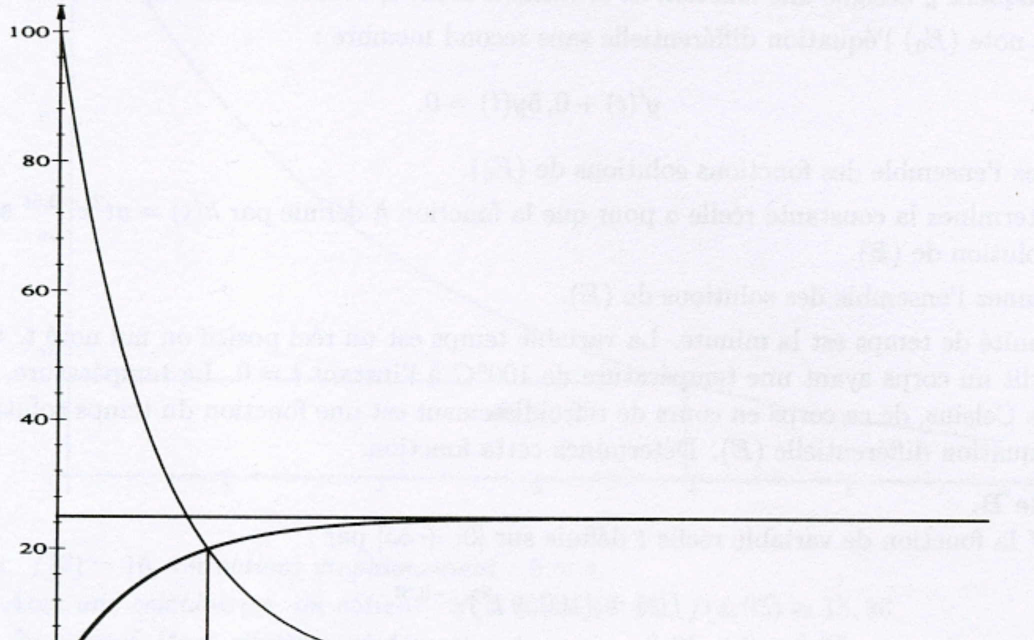
Solution

I. *1.* (E_1) *s'écrit :* $\dfrac{dQ_1}{dt} + Q_1 = 0$. *Cette équation différentielle linéaire* (E_1) *admet pour solution générale la fonction définie pour tout* $t \geqslant 0$ *par* $t \mapsto Ce^{-t}$, *où* C *est une constante réelle.* $Q_1(0) = 100$ *si, et seulement si,* $Ce^0 = C = 100$. *Donc la solution particulière déterminée la condition initiale* $Q_1(0) = 100$ *est définie sur* $[0, +\infty[$ *par* $Q_1(t) = 100e^{-t}$.

2. L'équation homogène associée à (E_2) *s'écrit* $\dfrac{dQ_2}{dt} + Q_2 = 0$ *; elle admet pour solution générale sur* $[0, +\infty[$ *la fonction définie pour tout* $t \geqslant 0$ *par* $t \mapsto Ke^{-t}$ *où* K *est une constante réelle.*
Cherchons une solution particulière de (E_2) *constante en posant* $\phi(t) = a$ *pour tout* $t \geqslant 0$.
La fonction ϕ *est une solution sur* $[0, +\infty[$ *de* (E_2) *si, et seulement si, pour tout* $t \geqslant 0$, $\phi'(t) + \phi(t) = 25$. *Or* $\phi'(t) = 0$, *donc* $a = 25$ *: la fonction* ϕ *définie sur* $[0, +\infty[$ *par* $\phi(t) = 25$ *est une solution particulière de* (E_2).
La solution générale de (E_2) *est la fonction définie pour tout* $t \geqslant 0$ *par* $t \mapsto Ke^{-t} + 25$.
$Q_2(0) = 0 \Longleftrightarrow Ke^0 + 25 = 0 \Longleftrightarrow K = -25$. *Donc, pour tout* $t \geqslant 0$, $Q_2(t) = 25\left(1 - e^{-t}\right)$.

II. *1. Pour tout* $t \geqslant 0$, $f_1'(t) = -100e^{-t}$ *donc* $f_1'(t) < 0$ *: la fonction* f_1 *est strictement décroissante sur* $[0, +\infty[$. *D'autre part* $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t) = 0$ *: la courbe représentative de* f_1 *admet l'axe des abscisses pour asymptote.*
Pour tout $t \in [0, 4]$, $f_2'(t) = 25e^{-t}$, *donc* $f_2'(t) > 0$ *: la fonction* f_2 *est strictement décroissante sur* $[0, 4]$.
Puisque $\lim\limits_{t \to +\infty} f_2(t) = 25$, *la courbe représentative de* f_2 *admet la droite d'équation* $y = 25$ *pour asymptote.*

2. Courbes représentatives des fonctions f_1 *et* f_2 *:*



a. $f_1(t) \geqslant f_2(t)$ *lorsque la courbe représentative de* f_1 *est située au-dessus de celle de* f_2, *ce qui correspond graphiquement aux valeurs de* t *appartenant à l'intervalle* $[0; 1, 6]$.
b. $f_1(t) \geqslant f_2(t) \Longleftrightarrow 100e^{-t} \geqslant 25\left(1 - e^{-t}\right) \Longleftrightarrow 4e^{-t} \geqslant 1 - e^{-t} \Longleftrightarrow 5e^{-t} \geqslant 1$.
On en déduit : $e^{-t} \geqslant \dfrac{1}{5} \Longleftrightarrow -t \geqslant \ln\left(\dfrac{1}{5}\right) \Longleftrightarrow t \leqslant -\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)$, *soit* $t \leqslant \ln 5$.