Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
Equations et inéquations associées page 94 - 114
Programme d'étude :

__Avant-Propos:__
C'est une des deux parties majeures du programme (avec à suivre la fonction dérivée).

Contenu :

Une fonction affine admet pour expression $f(x) = ax+b$: Si une fonction a pour expression $f(x) = a\,x^2 + bx + c$, alors sa représentation graphique est ***une parabole de sommet $S(\alpha\,;\beta)$*** car dans ce cas $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$.

Le contenu est parfaitement regroupé dans le livre pages 96-101 ;

Progression :

Leçon n°1 : Formes d'un polynôme du second degré ; activité n°2 page 94;
Leçon n°2 : Equations du second degré ; activité n°3 page 94 ;
Leçon n°3 : Inéquations du second degré ; activité n°4 page 94 ;

L'essentiel du cours, et les exercices corrigés :

Faire le point : page 104 ; Exercice n°1 & 2 page 102-103 ;

Les exercices d'entraînement :

__Polynômes du second degré ;__
Ex n°22 & 25 page 107 ; ex n°26 page 107 ; ex n° 31 page 108 ;

__Equations et inéquations ;__
Ex n°40 & 42 & 44 page 109 :
Ex n°59 & 61 page 110 :

__Problèmes ;__
Exercices n°67 page 111 , n°76 page 113 ;

Devoir maison :
Exercice n°79 page 113 :
Exclusion du cours :
Exercices n°18 & 19 page 106 ; n°43 page 109 :

Fait à Nantes le jeudi 3 janvier 2008 17:32:58

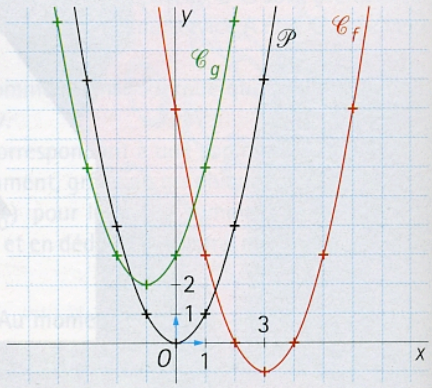
1 De la parabole au polynôme

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et deux paraboles translatées de $\mathscr{P}$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, qui sont respectivement les représentations graphiques de deux fonctions polynômes du second degré f et g.

a) Indiquer la translation permettant de passer de $\mathscr{P}$ à $\mathscr{C}_f$.

b) À l'aide des fonctions associées, en déduire la fonction f. Indiquer le sens de variation de f.

c) Répondre aux questions précédentes en remplaçant $\mathscr{C}_f$ et f respectivement par $\mathscr{C}_g$ et g.

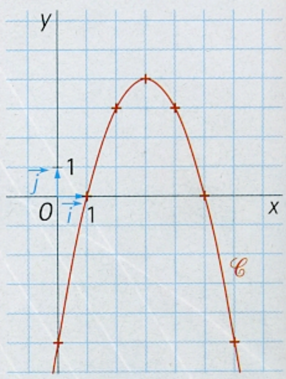


2 Formes d'un polynôme du second degré

Soit le polynôme $P(x)$ écrit sous forme réduite, pour tout réel x, $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1° a) Vérifier que $P(x) = -(x-3)^2 + 4$. Cette forme, où x n'intervient qu'une seule fois, est la **forme canonique**.

b) En déduire la translation permettant de passer de la parabole $\mathscr{P}'$ d'équation $y = -x^2$ à la parabole $\mathscr{C}$ ci-contre d'équation $y = -x^2 + 6x - 5$.



2° a) Lire les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection de la parabole $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

b) Vérifier que $P(x) = -(x - x_1)(x - x_2)$.

Retrouver (par le calcul) cette factorisation à partir de la forme canonique en 1° a).

3° Soit le polynôme $Q(x) = 2x^2 + 12x + 19$, pour tout réel x.

Les nombres $a = 2$, $b = 12$ et $c = 19$ sont les coefficients du polynôme.

a) Calculer $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = Q(\alpha)$. Vérifier que $Q(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

b) En déduire la transformation permettant de passer de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ à la parabole $\mathscr{C}$ représentant la fonction polynôme Q.

c) Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

4° Par lecture graphique, justifier que, pour tout réel x, $Q(x)$ est strictement positif.

5° Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Développer $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$. Quelle expression retrouve-t-on ?

Dans quel cas l'expression entre les crochets peut-elle se factoriser ?

b) On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, en déduire que $P(x) = a(x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

c) Développer $a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c$.

Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
Equations et inéquations associées page 94 - 114
Programme d'étude :

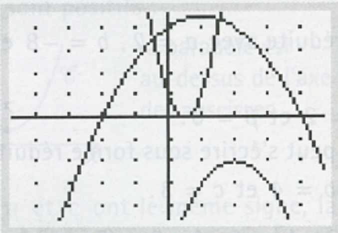
3 Équations du second degré et graphique

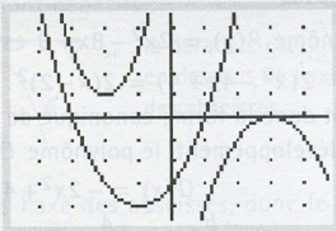
On considère les polynômes du second degré écrits sous forme canonique, pour tout réel x :

$P(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$; $Q(x) = -(x-2)^2 - 2$; $R(x) = (x+1)^2 - 4$;

$T(x) = 2(x+2)^2 + 1$; $S(x) = -(x-3)^2$; $V(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$.

1° En utilisant les transformations de la parabole $\mathscr{P}$, d'équation $y = x^2$, associer à chacun de ces polynômes sa courbe représentative $\mathscr{C}$ obtenue à l'aide d'une calculatrice graphique et préciser son sommet.





2° Pour chacun des polynômes ci-dessus, développer la forme canonique pour obtenir la forme réduite $ax^2 + bx + c$.

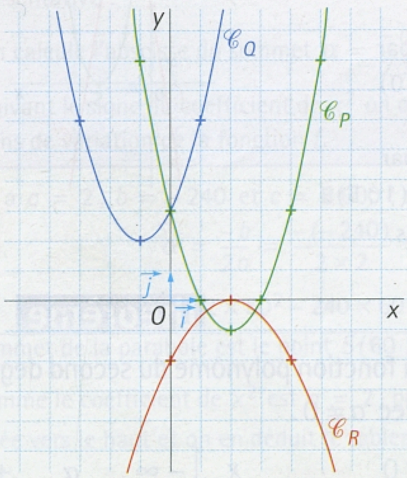
3° Résoudre graphiquement les équations suivantes :

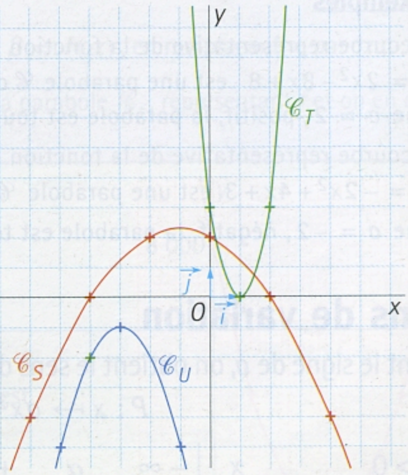
a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; b) $-x^2 + 4x - 6 = 0$; c) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

d) $2x^2 + 8x + 9 = 0$; e) $-x^2 + 6x - 9 = 0$; f) $-\frac{x^2}{2} + x + 4 = 0$.

4 Inéquations du second degré et graphique

P, Q, R, S, T et U sont des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ représentées ci-dessous :





Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 4x + 3 < 0$; b) $x^2 + 2x + 3 < 0$; c) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;

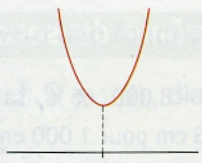
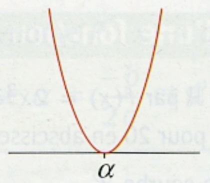
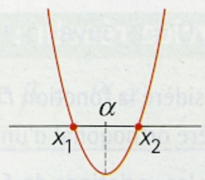
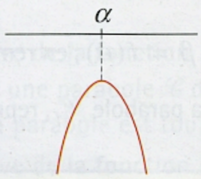
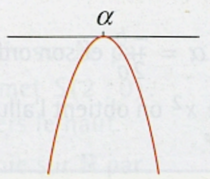
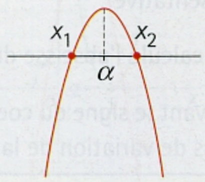
d) $-0{,}25x^2 - 0{,}5x + 2 \leqslant 0$; e) $3x^2 - 6x + 3 > 0$; f) $-x^2 - 6x - 10 \leqslant 0$.

Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
Equations et inéquations associées page 94 - 114
Programme d'étude :

2 Équation $ax^2 + bx + c = 0$
Factorisation et signe du trinôme

L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On admet les résultats ci-dessous :

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	pas de solution	une seule solution : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ (solution double)	deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisation de $P(x)$	pas de factorisation	$P(x) = a(x-\alpha)^2$	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
$a > 0$			
• position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses	x : $-\infty$ ... $+\infty$ $P(x)$: $+$	x : α $P(x)$: $+$ 0 $+$	x : x_1 x_2 $P(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
• *signe* de $P(x)$			
$a < 0$	x : $-\infty$ ... $+\infty$ $P(x)$: $-$	x : α $P(x)$: $-$ 0 $-$	x : x_1 x_2 $P(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

• Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions, ces solutions sont les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.
Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

• Lorsque le polynôme a deux racines distinctes x_1 et x_2, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des deux racines : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
Equations et inéquations associées page 94 - 114
Programme d'étude :

★ **67** Résolvez l'inéquation $\frac{x^2+7}{x+1} > 4$ en remarquant qu'elle équivaut à $\frac{x^2+7}{x+1} - 4 > 0$, c'est-à-dire :

$$\frac{x^2-4x+3}{x+1} > 0.$$

Commentaire : Pour résoudre cette inéquation, il est tentant de multiplier les deux membres par $x+1$, et de remplacer alors l'inéquation proposée par $x^2+7 > 4(x+1)$. Mais il ne faut pas le faire, car la multiplication par $x+1$ change le sens de l'inégalité lorsque $x+1$ est négatif.

68 Exercice commenté

On considère l'inéquation $\frac{2}{x} < x-1$ (E).

On se propose de résoudre cette inéquation de deux manières.

1. *Méthode algébrique*

Démontrez que l'inéquation $\frac{2}{x} < x-1$ peut s'écrire sous la forme $\frac{x^2-x-2}{x} > 0$ et résolvez cette inéquation (E) en utilisant un tableau de signes.

2. *Méthode graphique*

a) Résolvez l'équation $\frac{2}{x} = x-1$.

b) Dans un même repère orthonormal, tracez la droite d d'équation $y = x-1$ et l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation $y = \frac{2}{x}$.

Utilisez les résultats de la question **a)** pour déterminer les coordonnées des points communs à d et à $\mathscr{H}$.

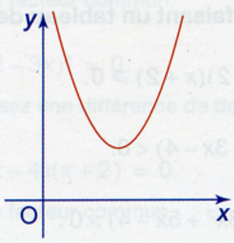
c) Utilisez le graphique pour retrouver l'ensemble des solutions de l'inéquation (E).

Lectures graphiques

69 Un exemple guidé

La parabole $\mathscr{P}$ dessinée ci-dessous représente l'une des quatre fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto x^2-4x+4$; $f_2 : x \mapsto -2x^2+x+5$;
$f_3 : x \mapsto x^2-4x+5$; $f_4 : x \mapsto -x^2-4x+5$.



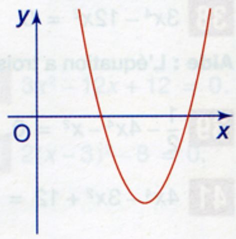
Pour trouver de quelle fonction il s'agit, voici une démarche possible.

1. La parabole $\mathscr{P}$ est tournée vers le haut. Que peut-on en déduire ?
2. Quelle constatation graphique permet d'affirmer que $\Delta < 0$?
3. Parmi les quatre fonctions données, laquelle est représentée par la parabole $\mathscr{P}$?

★ **70** On considère les trois fonctions :

$f_1 : x \mapsto 5x^2+3x+2$;
$f_2 : x \mapsto -2x^2+3x+1$;
$f_3 : x \mapsto x^2-7x+10$.

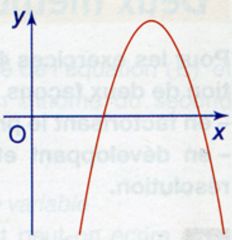
Parmi ces trois fonctions, laquelle est représentée par la parabole ci-contre ?



★ **71** On considère les cinq fonctions :

$f_1 : x \mapsto -2x^2+2x+1$;
$f_2 : x \mapsto -10x^2+14x-4$;
$f_3 : x \mapsto -x^2+2x-1$;
$f_4 : x \mapsto -x^2+5x$;
$f_5 : x \mapsto x^2+5$;

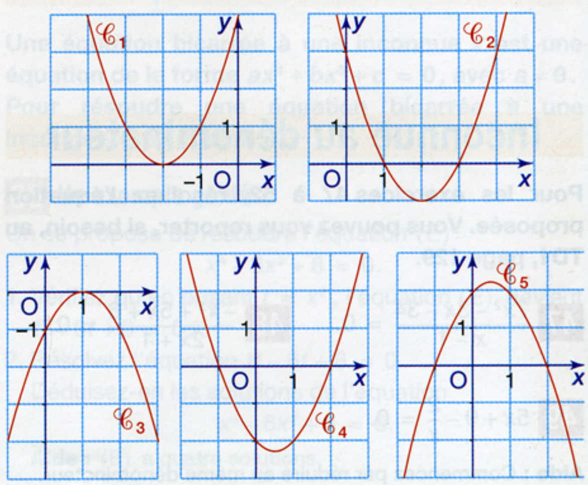
Parmi ces cinq fonctions, laquelle est représentée par la parabole ci-contre ?



72 Chacune des courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_5$ ci-dessous représente l'une des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto x^2-x-2$; $f_2 : x \mapsto x^2-4x+3$;
$f_3 : x \mapsto -x^2+x+2$; $f_4 : x \mapsto -x^2+2x-1$;
$f_5 : x \mapsto x^2+4x+4$.

Indiquez pour chaque courbe la fonction associée.



Programme d'étude :

Pour les exercices 36 à 41, résolvez de même les équations suivantes.

36 $x^4 - 2x^2 - 8 = 0.$

Aide : L'équation a deux solutions.

37 $3x^4 + 7x^2 + 2 = 0.$

Aide : L'équation n'a pas de solutions.

38 $3x^4 - 12x^2 = 0.$

Aide : L'équation a trois solutions.

★ **39** $\frac{1}{2} - 4x^4 - x^2 = 0.$

★ **40** $x^4 - 7x^2 + 12 = 0.$

★ **41** $4x^4 - 3x^2 + 12 = 0.$

Deux méthodes de résolution

Pour les exercices 42 à 46, résolvez chaque équation de deux façons :
– en factorisant le premier membre ;
– en développant et en utilisant les formules de résolution.

42 $4x^2 - (x-2)^2 = 0.$

★ **43** $x(3-x) + 6 - 2x = 0.$

44 $(x+3) - (x-1)(x+3) = 0.$

★ **45** $50 - 2(2-3x)^2 = 0.$

★ **46** $x^2 - x - 3(x-1) = 0.$

Inconnue au dénominateur

Pour les exercices 47 à 52, résolvez l'équation proposée. Vous pouvez vous reporter, si besoin, au TD1, page 129.

47 $\frac{7x^2 - 3x - 34}{x-1} = 0.$

48 $\frac{-x^2 + 5x + 6}{2x+1} = 0.$

49 $5x + 9 - \frac{2}{x} = 0.$

Aide : Commencez par réduire au même dénominateur.

50 $\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = 2.$

Aide : Commencez par réduire au même dénominateur.

★ **51** $\frac{-x^2 + 5x - 6}{x+1} = 0.$

★ **52** $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x^2 + 3x} = \frac{1}{2}.$

Inéquations du second degré

Pour les exercices 53 à 62, résolvez l'inéquation.

53 $x^2 - x + 1 \geqslant 0.$

54 $4x^2 - x + 1 < 0.$

55 $-3x^2 + 15 < 0.$

56 $-5x^2 + 4x + 1 \geqslant 0.$

57 $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} < 0.$

58 $30x^2 < 0{,}2x.$

59 $x^2 < x\sqrt{2} + \frac{1}{2}.$

60 $2x < x^2 - 1.$

★ **61** $(1-x)^2 < -x^2.$

★ **62** $(2-3x)^2 \leqslant (1-x)^2.$

Tableau de signes

63 Un exemple guidé

On pose $f(x) = (x^2 + x - 6)(x+1)$.

1. Expliquez pourquoi le signe de $f(x)$ est indiqué dans le tableau ci-dessous.

x		-3		-1		2	
$x^2 + x - 6$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x + 1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2. Déduisez de ce tableau l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x^2 + x - 6)(x+1) < 0$.

Pour les exercices 64 à 67, résolvez chacune des inéquations en faisant un tableau de signes.

64 $(-6x^2 - x + 2)(x+2) \geqslant 0.$

65 $(2-x)(x^2 + 3x - 4) < 0.$

66 $(x+10)(-3x^2 + 5x - 4) > 0.$

Programme d'étude :

80 ★ Coût total et coût moyen

Une entreprise produit (et vend) des vélos de course.
Sa production quotidienne est entre 10 et 110 vélos, compte tenu de la chaîne de production.
Le coût total de fabrication est :

$$C(q) = q^2 - 10q + 1\,800,$$

exprimé en euros.
Chaque vélo fabriqué est vendu 100 €.

1° a) Étudier le sens de variation de la fonction coût total.

b) Représenter cette fonction dans un repère orthogonal d'origine O de coordonnées $(0\,;0)$, pour $q \in [10\,;70]$ seulement.

2° a) Rappeler ce que représente la pente de la droite (OM), où M est un point de la courbe de coût total.

b) Calculer le coût moyen de fabrication de 10 vélos, puis de 60 vélos.

c) Par lecture graphique, donner le sens de variation de la fonction de coût moyen telle que :

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q}.$$

3° a) Montrer que la fonction bénéfice est donnée par :

$$B(q) = -q^2 + 110q - 1\,800.$$

b) Déterminer la quantité q_0 qui permet un bénéfice maximal et donner la valeur de ce maximum.
Placer le point correspondant sur la courbe de coût total.

c) Déterminer le nombre minimal et le nombre maximal de vélos à produire, et à vendre, afin d'assurer un profit à cette entreprise (bénéfice positif ou nul).

81 La fonction de demande d'un objet sur le marché est donnée par :

$$f(x) = \frac{10}{x+1}$$

où x est la quantité d'objets demandée chaque jour par les consommateurs (en centaines d'objets) et $f(x)$ le prix de cet objet sur le marché (exprimé en centaine d'euros).

La fonction d'offre de ce même objet est donnée par :

$$g(x) = 0{,}05(x^2 + 12x + 30).$$

1° a) Donner le tableau des variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$, représentation graphique de f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ bien choisi.

2° a) Montrer que, pour tout réel x positif :

$$g(x) = 0{,}05(x+6)^2 - 0{,}3$$

b) En déduire les variations de g sur $[0\,;+\infty[$.

c) Tracer la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g dans le même repère que précédemment.

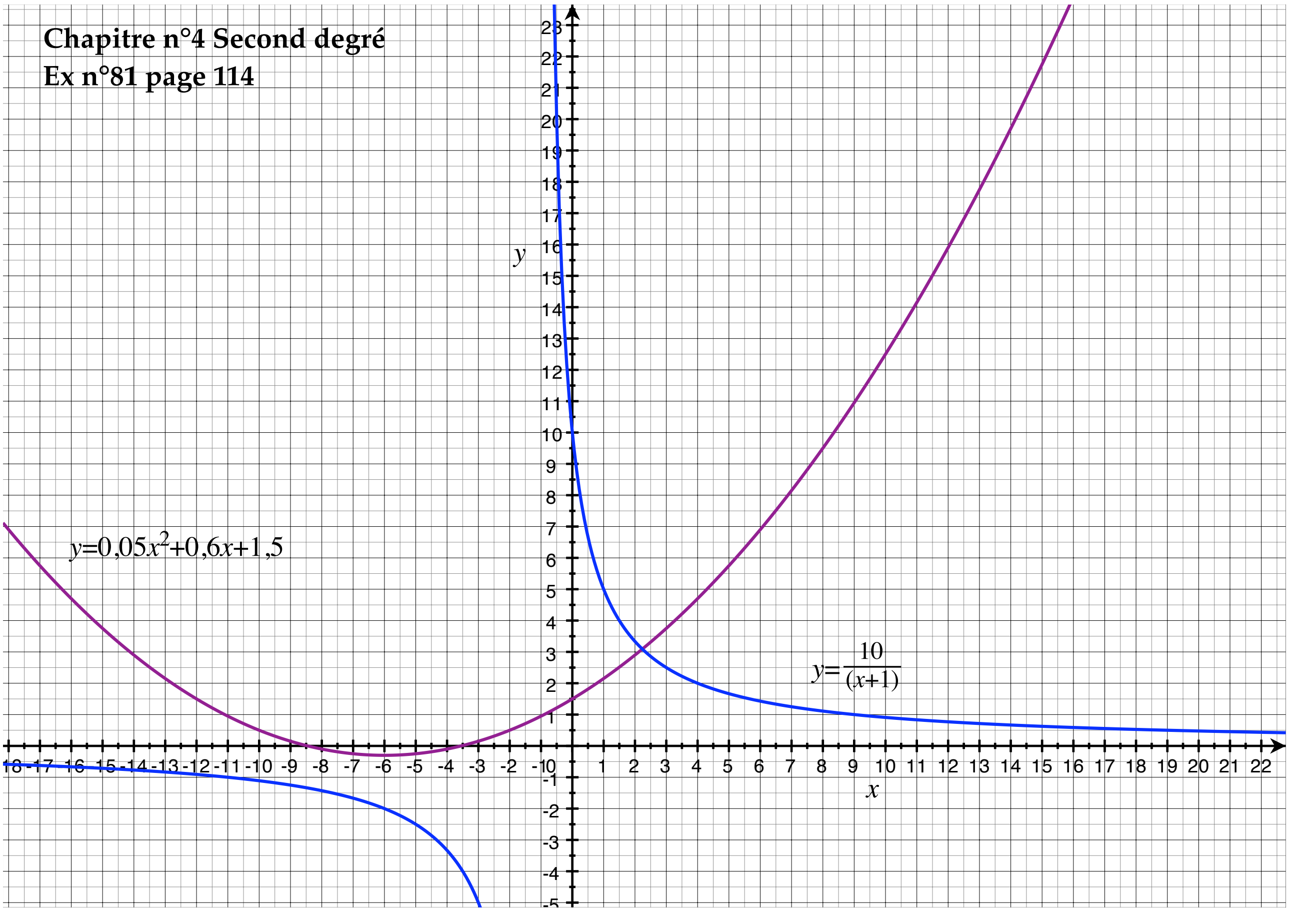
3° Par la lecture graphique, donner le prix d'équilibre p à la dizaine d'euros près.

4° On suppose que la fonction d'offre reste inchangée, mais que la quantité demandée par les consommateurs augmente de 50 objets par jour et ce quel que soit le prix.

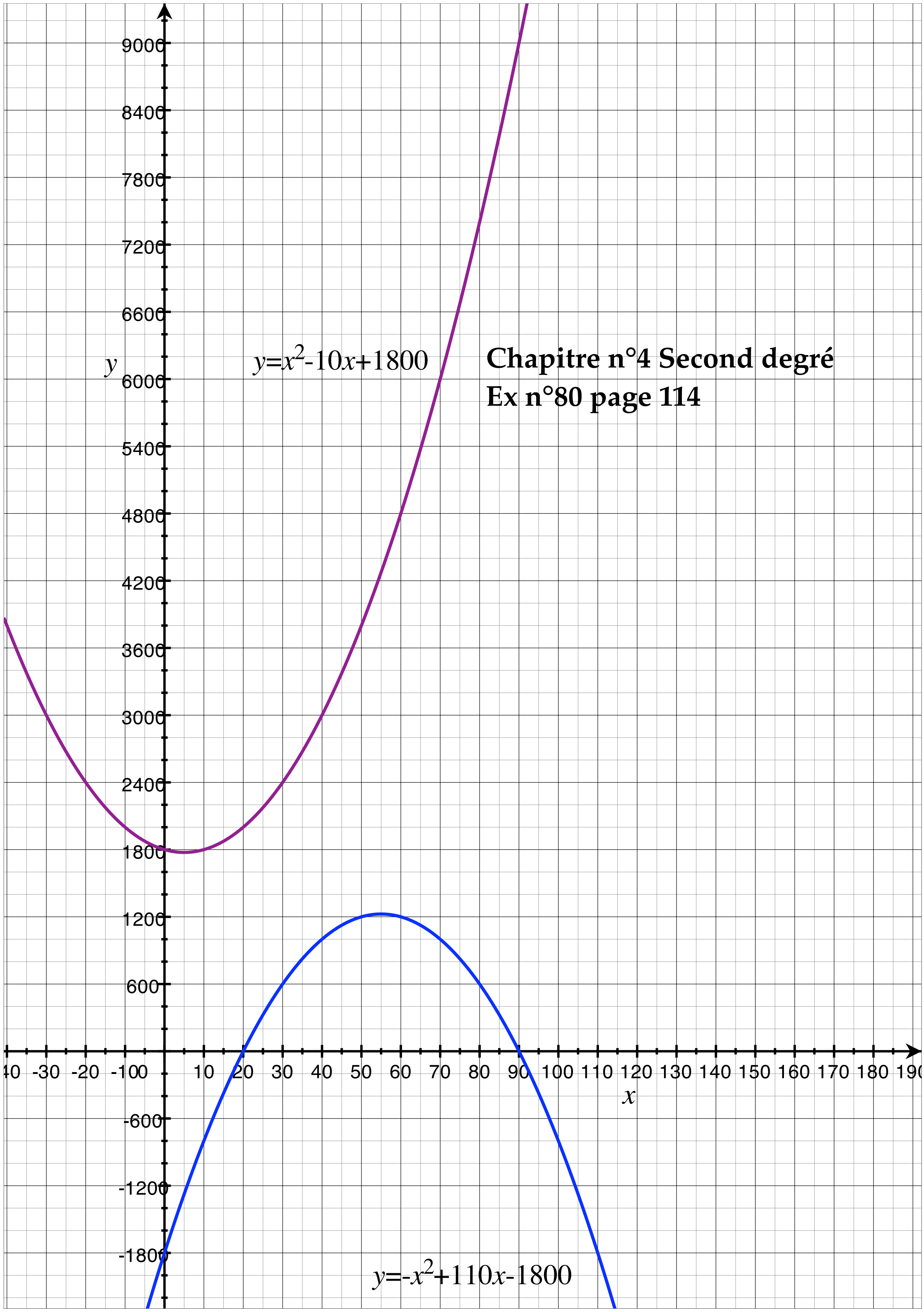
a) Exprimer la nouvelle fonction de demande f_1 en fonction de f.

b) En déduire la courbe représentative de f_1 dans le repère précédent.

c) Déterminer alors graphiquement le nouveau prix d'équilibre (à une dizaine d'euros près).



Programme d'étude :



Programme d'étude :

Programme d'étude :