

Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
Equations et inéquations associées page 94 - 114
Programme d'étude :



Avant-Propos:

C'est une des deux parties majeures du programme (avec à suivre la fonction dérivée).

Contenu :

*Une fonction affine admet pour expression $f(x) = ax+b$: Si une fonction a pour expression $f(x) = a x^2 + bx + c$, alors sa représentation graphique est **une parabole de sommet $S(\alpha ; \beta)$** car dans ce cas $f(x) = a (x - \alpha)^2 + \beta$.*

Le contenu est parfaitement regroupé dans le livre pages 96-101 ;

Progression :

Leçon n°1 : Formes d'un polynôme du second degré ; activité n°2 page 94;

Leçon n°2 : Equations du second degré ; activité n°3 page 94 ;

Leçon n°3 : Inéquations du second degré ; activité n°4 page 94 ;

L'essentiel du cours, et les exercices corrigés :

Faire le point : page 104 ; Exercice n°1 & 2 page 102-103 ;

Les exercices d'entraînement :

Polynômes du second degré :

Ex n°22 & 25 page 107 ; ex n°26 page 107 ; ex n° 31 page 108 ;

Equations et inéquations :

Ex n°40 & 42 & 44 page 109 :

Ex n°59 & 61 page 110 :

Problèmes :

Exercices n°67 page 111 , n°76 page 113 ;

Devoir maison :

Exercice n°79 page 113 :

Exclusion du cours :

Exercices n°18 & 19 page 106 ; n°43 page 109 :

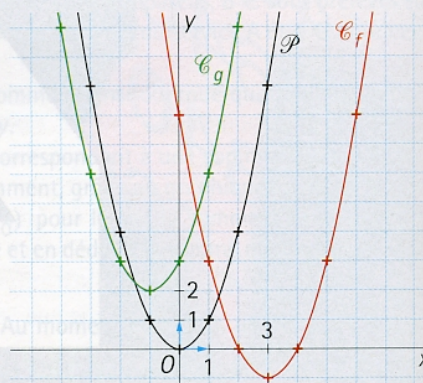
Fait à Nantes le jeudi 3 janvier 2008 20:45:40



1 De la parabole au polynôme

Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre, on considère la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et deux paraboles translatées de $\mathcal{P}$, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, qui sont respectivement les représentations graphiques de deux fonctions polynômes du second degré f et g .

- Indiquer la translation permettant de passer de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{C}_f$.
- À l'aide des fonctions associées, en déduire la fonction f . Indiquer le sens de variation de f .
- Répondre aux questions précédentes en remplaçant $\mathcal{C}_f$ et f respectivement par $\mathcal{C}_g$ et g .



2 Formes d'un polynôme du second degré

Soit le polynôme $P(x)$ écrit sous forme réduite, pour tout réel x , $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1° a) Vérifier que $P(x) = -(x-3)^2 + 4$. Cette forme, où x n'intervient qu'une seule fois, est la **forme canonique**.

b) En déduire la translation permettant de passer de la parabole $\mathcal{P}'$ d'équation $y = -x^2$ à la parabole $\mathcal{C}$ ci-contre d'équation $y = -x^2 + 6x - 5$.

2° a) Lire les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection de la parabole $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses.

b) Vérifier que $P(x) = -(x-x_1)(x-x_2)$.

Retrouver (par le calcul) cette factorisation à partir de la forme canonique en 1° a).

3° Soit le polynôme $Q(x) = 2x^2 + 12x + 19$, pour tout réel x .

Les nombres $a = 2$, $b = 12$ et $c = 19$ sont les coefficients du polynôme.

a) Calculer $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = Q(\alpha)$. Vérifier que $Q(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

b) En déduire la transformation permettant de passer de la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ à la parabole $\mathcal{C}$ représentant la fonction polynôme Q .

c) Tracer $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal.

4° Par lecture graphique, justifier que, pour tout réel x , $Q(x)$ est strictement positif.

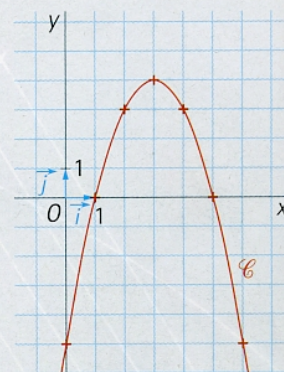
5° Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Développer $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$. Quelle expression retrouve-t-on ?

Dans quel cas l'expression entre les crochets peut-elle se factoriser ?

b) On pose $\alpha = -\frac{b}{2a}$, en déduire que $P(x) = a(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a}$.

c) Développer $a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c$.



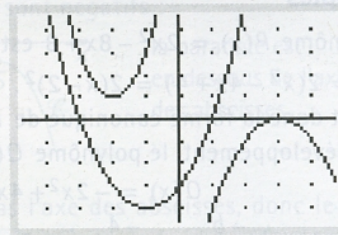
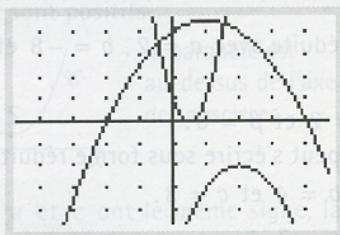
3 Équations du second degré et graphique

On considère les polynômes du second degré écrits sous forme canonique, pour tout réel x :

$$P(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 ; \quad Q(x) = -(x-2)^2 - 2 ; \quad R(x) = (x+1)^2 - 4 ;$$

$$T(x) = 2(x+2)^2 + 1 ; \quad S(x) = -(x-3)^2 ; \quad V(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}.$$

1° En utilisant les transformations de la parabole $\mathcal{P}$, d'équation $y = x^2$, associer à chacun de ces polynômes sa courbe représentative $\mathcal{C}$ obtenue à l'aide d'une calculatrice graphique et préciser son sommet.



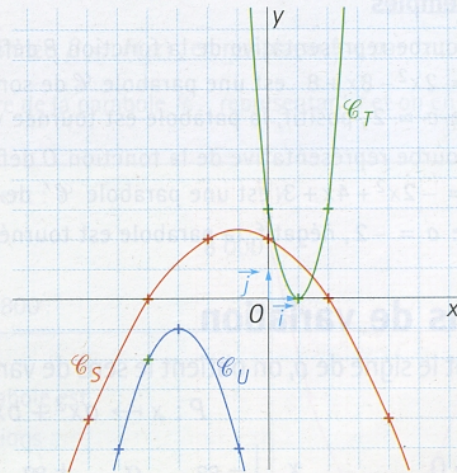
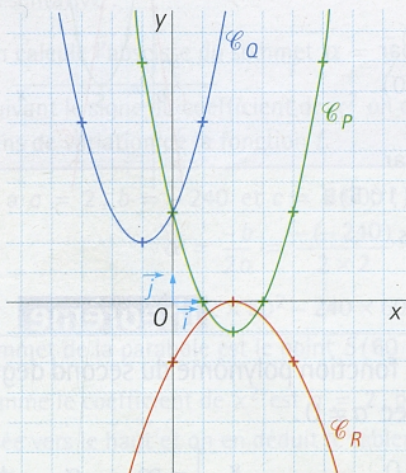
2° Pour chacun des polynômes ci-dessus, développer la forme canonique pour obtenir la forme réduite $ax^2 + bx + c$.

3° Résoudre graphiquement les équations suivantes :

a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; b) $-x^2 + 4x - 6 = 0$; c) $x^2 + 2x - 3 = 0$;
 d) $2x^2 + 8x + 9 = 0$; e) $-x^2 + 6x - 9 = 0$; f) $-\frac{x^2}{2} + x + 4 = 0$.

4 Inéquations du second degré et graphique

P, Q, R, S, T et U sont des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ représentées ci-dessous :



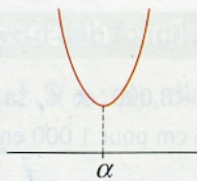
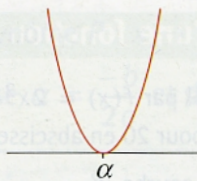
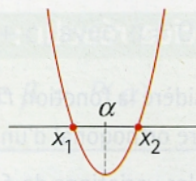
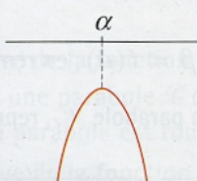
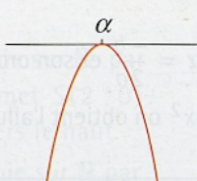
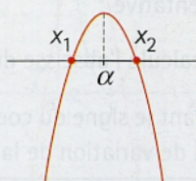
Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 4x + 3 < 0$; b) $x^2 + 2x + 3 < 0$; c) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \leq 0$;
 d) $-0,25x^2 - 0,5x + 2 \leq 0$; e) $3x^2 - 6x + 3 > 0$; f) $-x^2 - 6x - 10 \leq 0$.

2 Équation $ax^2 + bx + c = 0$ Factorisation et signe du trinôme

L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On admet les résultats ci-dessous :

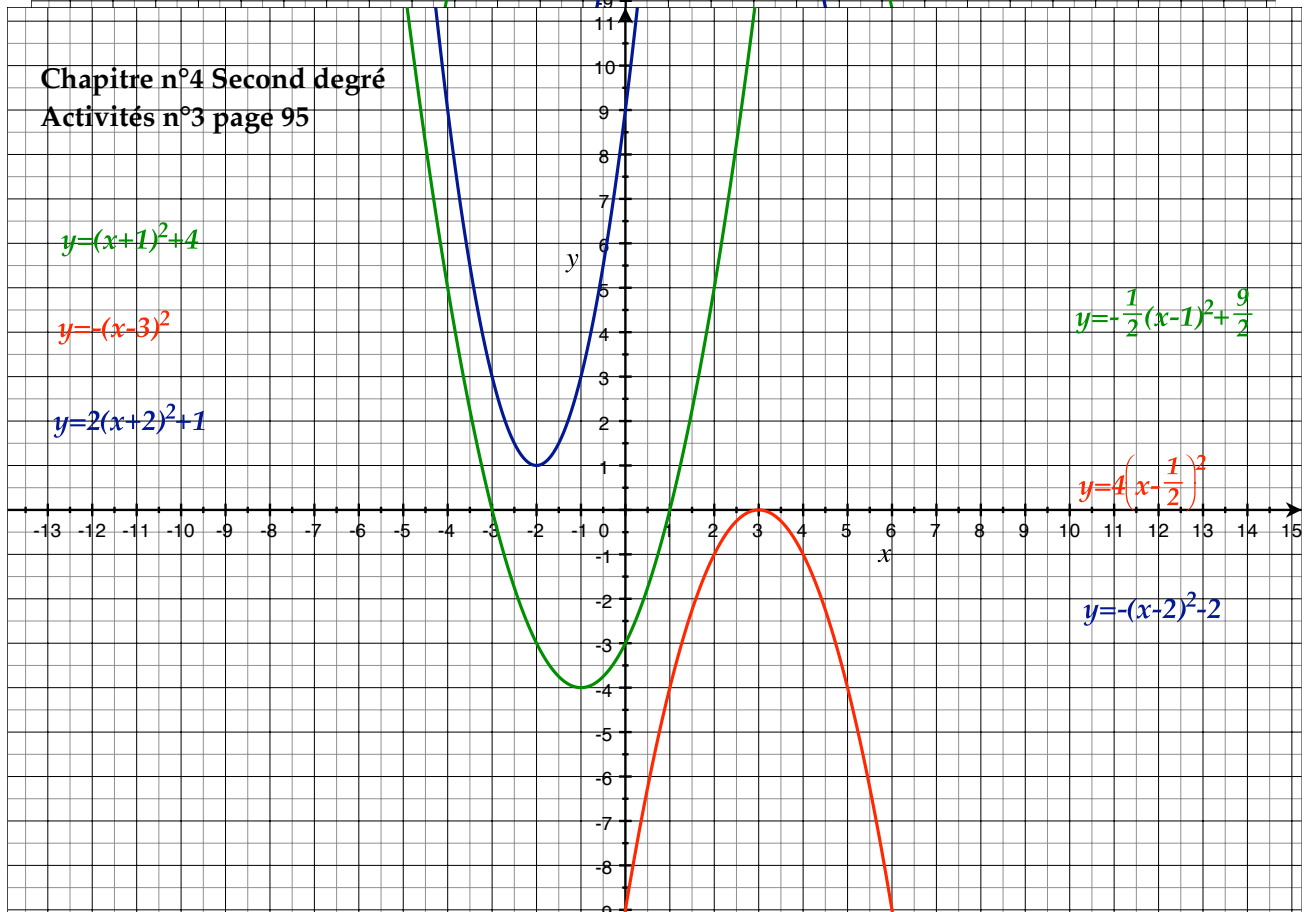
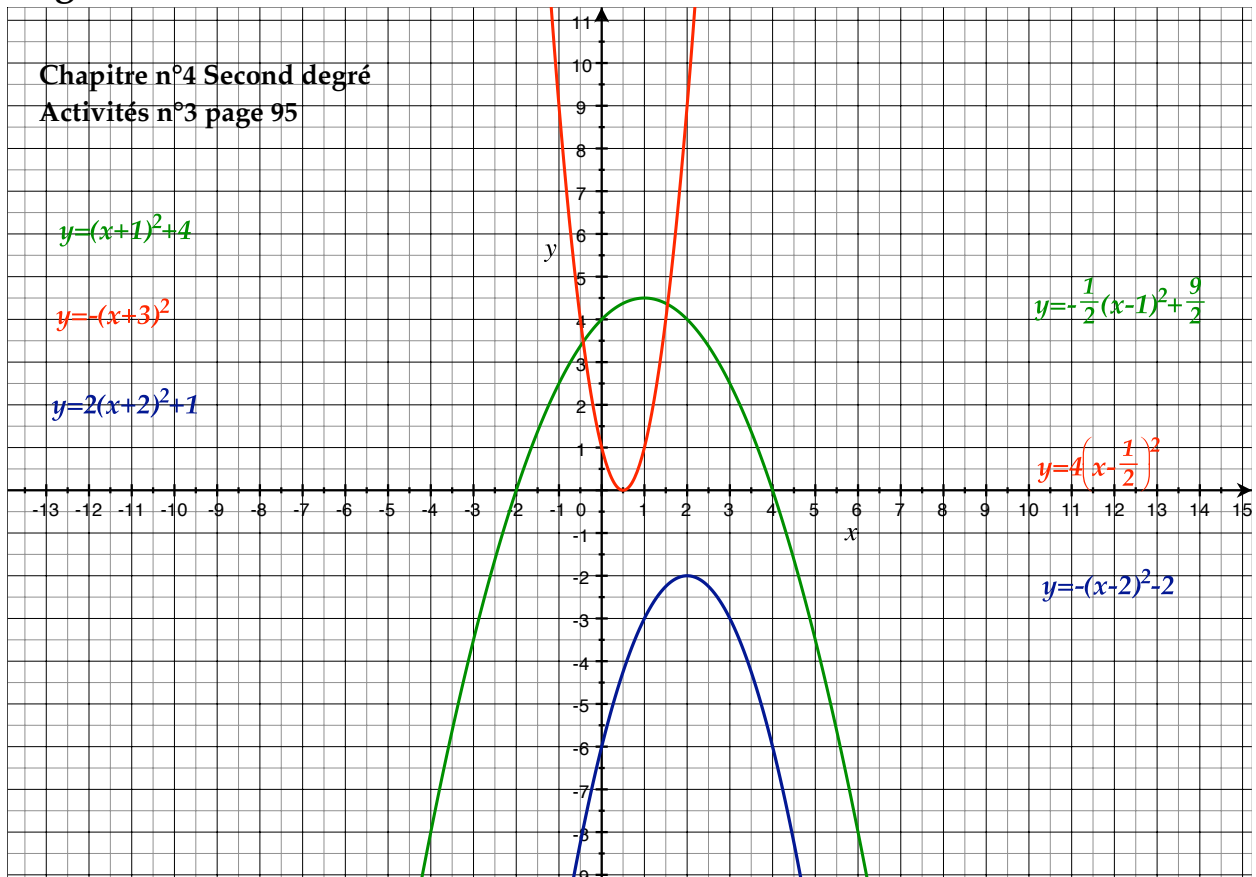
discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$																										
solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	pas de solution	une seule solution : $\alpha = \frac{-b}{2a}$ (solution double)	deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$																										
factorisation de $P(x)$	pas de factorisation	$P(x) = a(x - \alpha)^2$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$																										
$a > 0$ • position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses • signe de $P(x)$	 α <table data-bbox="426 1292 665 1382"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td><td>+</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	+	+	 α <table data-bbox="702 1292 941 1382"><tr><td>x</td><td></td><td>α</td><td></td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		α		$P(x)$	+	0	+	 x_1 α x_2 <table data-bbox="1000 1292 1286 1382"><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table>	x		x_1		x_2		$P(x)$	+	0	-	0	+
x	$-\infty$	$+\infty$																											
$P(x)$	+	+																											
x		α																											
$P(x)$	+	0	+																										
x		x_1		x_2																									
$P(x)$	+	0	-	0	+																								
$a < 0$	 α <table data-bbox="426 1628 665 1718"><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>-</td><td>-</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	-	-	 α <table data-bbox="702 1628 941 1718"><tr><td>x</td><td></td><td>α</td><td></td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		α		$P(x)$	-	0	-	 x_1 α x_2 <table data-bbox="1000 1628 1286 1718"><tr><td>x</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table>	x		x_1		x_2		$P(x)$	-	0	+	0	-
x	$-\infty$	$+\infty$																											
$P(x)$	-	-																											
x		α																											
$P(x)$	-	0	-																										
x		x_1		x_2																									
$P(x)$	-	0	+	0	-																								

• Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions, ces solutions sont les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.

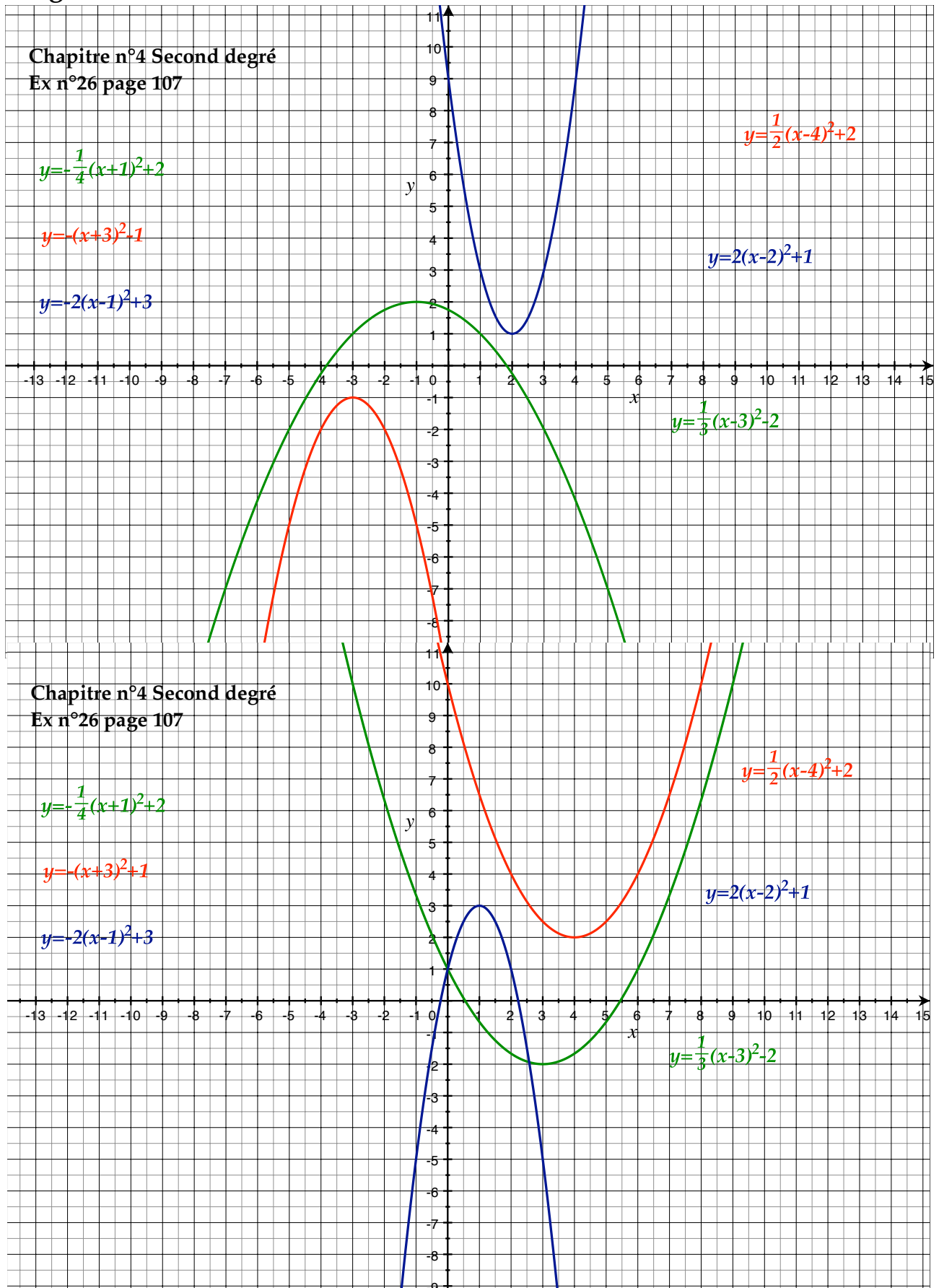
Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

• Lorsque le polynôme a deux racines distinctes x_1 et x_2 , l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des deux racines : $\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
 Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
 Equations et inéquations associées page 94 - 114
 Programme d'étude :



Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
 Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
 Equations et inéquations associées page 94 - 114
 Programme d'étude :



Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°4 : Polynômes du second degré -
Equations et inéquations associées page 94 - 114
Programme d'étude :