Première ES3 - Année Scolaire 2007-2008
Chapitre n°4 : Polynômes du second degré - Equations et inéquations associées page 94 - 114
Programme d'étude :

__Avant-Propos:__
C'est une des deux parties majeures du programme (avec à suivre la fonction dérivée).

Contenu :

Une fonction affine admet pour expression $f(x) = ax+b$: Si une fonction a pour expression $\boldsymbol{f(x) = a\,x^2 + bx + c}$, alors sa représentation graphique est ***une parabole de sommet $S(\alpha\,;\beta)$*** car dans ce cas $\boldsymbol{f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta}$.

Le contenu est parfaitement regroupé dans le livre pages 96-101 ;

Progression :

Leçon n°1 : Formes d'un polynôme du second degré ; activité n°2 page 94;
Leçon n°2 : Equations du second degré ; activité n°3 page 94 ;
Leçon n°3 : Inéquations du second degré ; activité n°4 page 94 ;

L'essentiel du cours, et les exercices corrigés :

Faire le point : page 104 ; Exercice n°1 & 2 page 102-103 ;

Les exercices d'entraînement :

__Polynômes du second degré ;__
Ex n°22 & 25 page 107 ; ex n°26 page 107 ; ex n° 31 page 108 ;

__Equations et inéquations ;__
Ex n°40 & 42 & 44 page 109 :
Ex n°59 & 61 page 110 :

__Problèmes ;__
Exercices n°67 page 111 , n°76 page 113 ;

Devoir maison :
Exercice n°79 page 113 :
Exclusion du cours :
Exercices n°18 & 19 page 106 ; n°43 page 109 :

Fait à Nantes le jeudi 3 janvier 2008 20:47:52

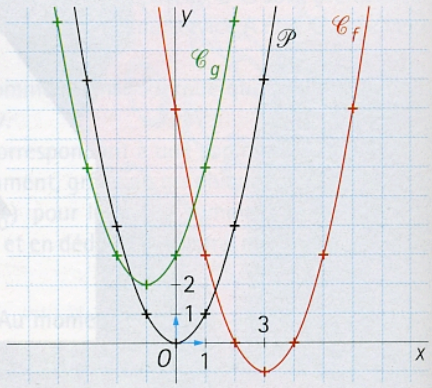
1 De la parabole au polynôme

Dans le repère $(O\ ;\ \vec{i}, \vec{j})$ ci-contre, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ et deux paraboles translatées de $\mathscr{P}$, $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, qui sont respectivement les représentations graphiques de deux fonctions polynômes du second degré f et g.

a) Indiquer la translation permettant de passer de $\mathscr{P}$ à $\mathscr{C}_f$.

b) À l'aide des fonctions associées, en déduire la fonction f. Indiquer le sens de variation de f.

c) Répondre aux questions précédentes en remplaçant $\mathscr{C}_f$ et f respectivement par $\mathscr{C}_g$ et g.

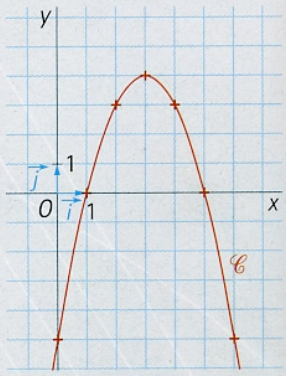


2 Formes d'un polynôme du second degré

Soit le polynôme $P(x)$ écrit sous forme réduite, pour tout réel x, $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

1° a) Vérifier que $P(x) = -(x-3)^2 + 4$. Cette forme, où x n'intervient qu'une seule fois, est la **forme canonique**.

b) En déduire la translation permettant de passer de la parabole $\mathscr{P}'$ d'équation $y = -x^2$ à la parabole $\mathscr{C}$ ci-contre d'équation $y = -x^2 + 6x - 5$.



2° a) Lire les abscisses x_1 et x_2 des points d'intersection de la parabole $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses.

b) Vérifier que $P(x) = -(x - x_1)(x - x_2)$.

Retrouver (par le calcul) cette factorisation à partir de la forme canonique en 1° a).

3° Soit le polynôme $Q(x) = 2x^2 + 12x + 19$, pour tout réel x.

Les nombres $a = 2$, $b = 12$ et $c = 19$ sont les coefficients du polynôme.

a) Calculer $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ et $\beta = Q(\alpha)$. Vérifier que $Q(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

b) En déduire la transformation permettant de passer de la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2$ à la parabole $\mathscr{C}$ représentant la fonction polynôme Q.

c) Tracer $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormal.

4° Par lecture graphique, justifier que, pour tout réel x, $Q(x)$ est strictement positif.

5° Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

a) Développer $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$. Quelle expression retrouve-t-on ?

Dans quel cas l'expression entre les crochets peut-elle se factoriser ?

b) On pose $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$, en déduire que $P(x) = a(x-\alpha)^2 - \dfrac{\Delta}{4a}$.

c) Développer $a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + c$.

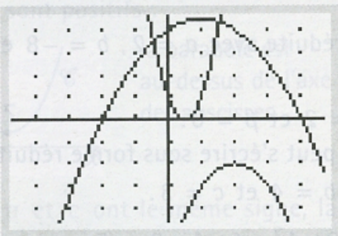
3 Équations du second degré et graphique

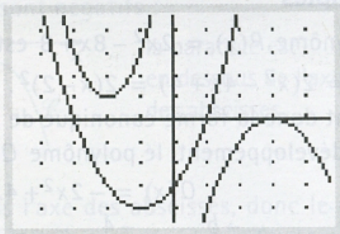
On considère les polynômes du second degré écrits sous forme canonique, pour tout réel x :

$P(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$; $\quad Q(x) = -(x-2)^2 - 2$; $\quad R(x) = (x+1)^2 - 4$;

$T(x) = 2(x+2)^2 + 1$; $\quad S(x) = -(x-3)^2$; $\quad V(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$.

1° En utilisant les transformations de la parabole $\mathscr{P}$, d'équation $y = x^2$, associer à chacun de ces polynômes sa courbe représentative $\mathscr{C}$ obtenue à l'aide d'une calculatrice graphique et préciser son sommet.





2° Pour chacun des polynômes ci-dessus, développer la forme canonique pour obtenir la forme réduite $ax^2 + bx + c$.

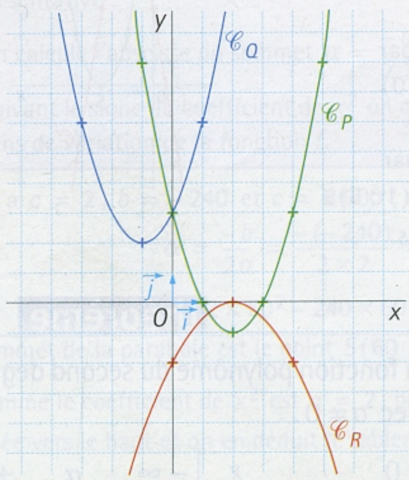
3° Résoudre graphiquement les équations suivantes :

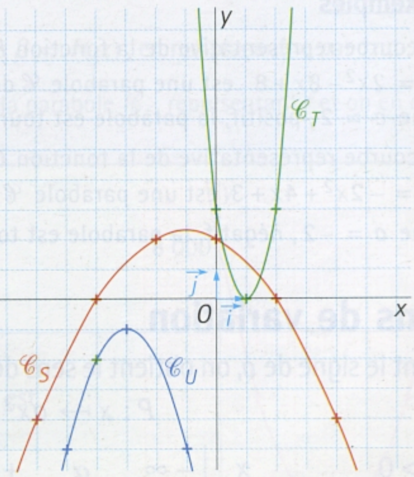
a) $4x^2 - 4x + 1 = 0$; b) $-x^2 + 4x - 6 = 0$; c) $x^2 + 2x - 3 = 0$;

d) $2x^2 + 8x + 9 = 0$; e) $-x^2 + 6x - 9 = 0$; f) $-\frac{x^2}{2} + x + 4 = 0$.

4 Inéquations du second degré et graphique

P, Q, R, S, T et U sont des fonctions polynômes du second degré définies sur $\mathbb{R}$ représentées ci-dessous :





Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :

a) $x^2 - 4x + 3 < 0$; b) $x^2 + 2x + 3 < 0$; c) $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \leqslant 0$;

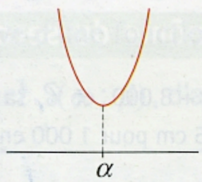
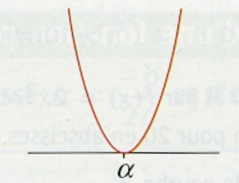
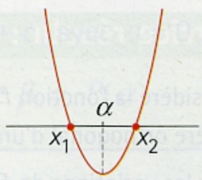
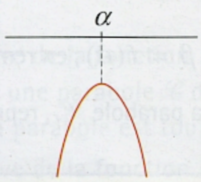
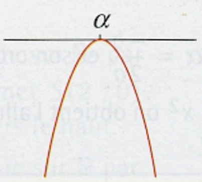
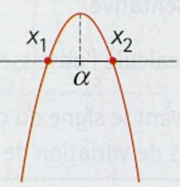
d) $-0{,}25x^2 - 0{,}5x + 2 \leqslant 0$; e) $3x^2 - 6x + 3 > 0$; f) $-x^2 - 6x - 10 \leqslant 0$.

Programme d'étude :

2 Équation $ax^2 + bx + c = 0$
Factorisation et signe du trinôme

L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On admet les résultats ci-dessous :

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	pas de solution	une seule solution : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ (solution double)	deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisation de $P(x)$	pas de factorisation	$P(x) = a(x-\alpha)^2$	$P(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$
$a > 0$ • position de la parabole par rapport à l'axe des abscisses	 $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline P(x) & & + & \end{array}$	 $\begin{array}{c\|ccccc} x & & & \alpha & & \\ \hline P(x) & & + & 0 & + & \end{array}$	 $\begin{array}{c\|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline P(x) & + & 0 & - & 0 & + \end{array}$
• *signe* de $P(x)$ $a < 0$	 $\begin{array}{c\|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline P(x) & & - & \end{array}$	 $\begin{array}{c\|ccccc} x & & & \alpha & & \\ \hline P(x) & & - & 0 & - & \end{array}$	 $\begin{array}{c\|ccccc} x & & x_1 & & x_2 & \\ \hline P(x) & - & 0 & + & 0 & - \end{array}$

- Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions, ces solutions sont les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.

- Lorsque le polynôme a deux racines distinctes x_1 et x_2, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des deux racines : $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

Programme d'étude :