BREVET DE TECHNICIEN SUPERIEUR
SESSION 2001
ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
GROUPEMENT B

EXERCICE II (11 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle (E) :

$$y' - 2y = e^x$$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et y' sa fonction dérivée.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle (E_0) :

$$y' - 2y = 0$$

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = -e^x$$

Démontrer que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$.

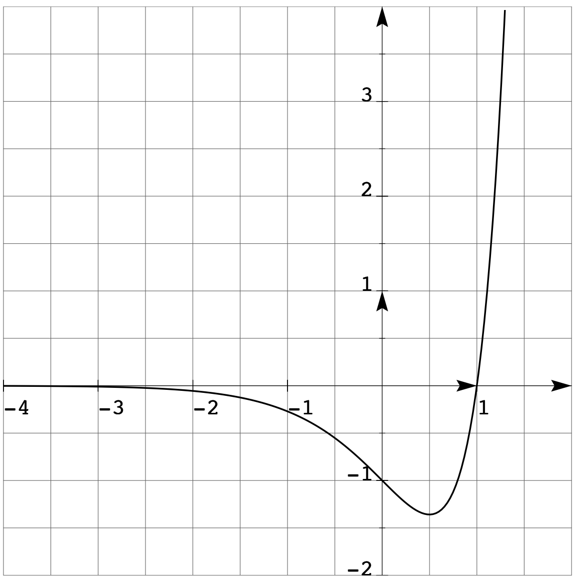
B. Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x-1)e^{2x}$$

Sa courbe représentative C est donnée dans le repère de l'annexe (à rendre avec la copie).

1.
   (a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$



(b) On admet que $\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0$. En déduire $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(c) Interpréter géométriquement le résultat obtenu au b).

2.

(a) Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = (2x-1)e^{2x}$$

(b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geq 0$.

(c) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

3.

(a) A l'aide du développement limité au voisinage de 0 de la fonction exponentielle $t \longmapsto e^t$, donner le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction $x \longmapsto e^{2x}$.

(b) En déduire que le développement limité, à l'ordre 3, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

avec

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

(c) En déduire une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 et la position relative de C et de T au voisinage de ce point.

(d) Tracer T dans le repère de l'annexe.

C. Calcul intégral

1. Soit α un réel strictement négatif ; On pose

$$I(\alpha) = \int_\alpha^0 f(x)\,dx$$

Démontrer que

$$I(\alpha) = -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha}$$

On pourra effectuer une intégration par parties.

2.

(a) Calculer la limite de $I(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$.

(b) A l'aide d'une phrase, donner une interprétation graphique de ce résultat.

EXERCICE II (11 points)

1. Le cours permet de dire que les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions définies par :

$$x \longmapsto ke^{2x}$$

où k est une constante réelle.

2. On a :

$$h'(x) = e^{2x} + 2xe^{2x}$$

ce qui permet d'obtenir pour tout réel x :

$$h'(x) - 2h(x) = e^{2x}$$

ce qui prouve bien que h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. D'après le cours, on peut dire que les fonctions y, solutions de l'équation différentielle (E) sont définies par :

$$y(x) = ke^{2x} + h(x) = ke^{2x} + xe^{2x}$$

4. $f(0) = -1 \Leftrightarrow k = -1$. La solution particulière f de l'équation (E) qui vérifie la condition $f(0) = -1$ est donc définie pour tout x réel par :

$$f(x) = -e^{2x} + xe^{2x} = e^{2x}(-1 + x)$$

1. :

   (a) Le cours donne de manière évidente :

   $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

   (b) Par développement, on a :

   $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^{2x} - e^{2x} = 0$$

   en utilisant la limite fournie.

   (c) On en déduit que la courbe représentative de f admet comme asymptote horizontale l'axe des abscisses.

2. :

   (a) On vérifie facilement que :

   $$f'(x) = 1 \times e^{2x} + (x-1)\left(2e^{2x}\right) = (2x-1)e^{2x}$$

   (b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $(2x-1)$. Donc si $x \leqslant \frac{1}{2}$, alors $f'(x) \leqslant 0$, tandis que si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors $f'(x) \geqslant 0$.

   (c) On en déduit évidemment que la fonction f est décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{1}{2}, \infty\right[$.

3. :

BTS ATI 2 ; Année Scolaire 2008-2009
BTS ATI Session 2001 ; Durée : 1 h : calculatrice autorisée
Devoir en classe n°1 bis

(a) On remplace t par $2x$ dans le formulaire, ce qui donne :

$$e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

(b) On a en développant la fonction f :

$$\begin{aligned} f(x) &= xe^{2x} - e^{2x} \\ &= x\left(1 + 2x + 2x^2\right) - \left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) + x^3\varepsilon(x) \\ &= -1 - x + \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x) \end{aligned}$$

(c) On en déduit que la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation :

$$y = -1 - x$$

Pour étudier la position relative de C et de T au voisinage de ce point, formons :

$$f(x) - (-x - 1) = \frac{2}{3}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

On en déduit donc que sur un voisinage de 0, si $x < 0$, alors la courbe C est en-dessous de T, et que si $x > 0$, alors C est au-dessus de T.

(d) Voir la courbe en fin de correction.

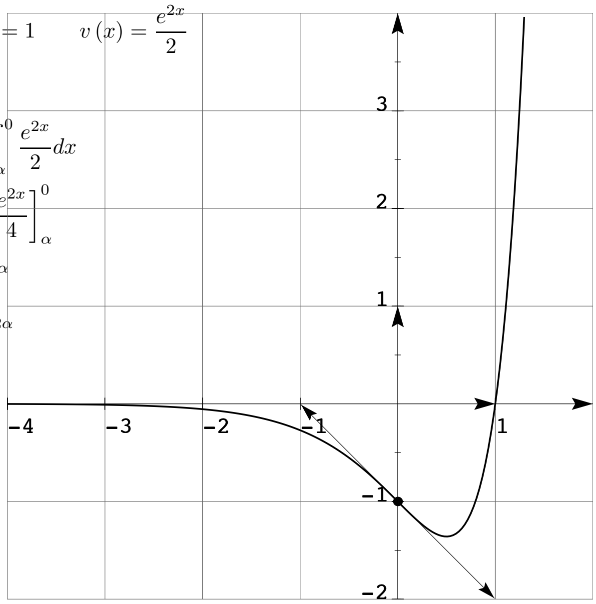
C. Calcul intégral

1. Effectuons une intégration par parties en posant :

$$u(x) = x - 1 \qquad v'(x) = e^{2x} \Rightarrow u'(x) = 1 \qquad v(x) = \frac{e^{2x}}{2}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 \frac{e^{2x}}{2}dx \\ &= \left[(x-1)\frac{e^{2x}}{2}\right]_\alpha^0 - \left[\frac{e^{2x}}{4}\right]_\alpha^0 \\ &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2\alpha} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} \\ &= -\frac{3}{4} - \left(\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{4}\right)e^{2\alpha} \end{aligned}$$



2.

(a) En utilisant la limite de cours :

$$\lim_{\alpha\to-\infty} \alpha e^{2\alpha} = 0$$

on obtient :

$$\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to-\infty} -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}e^{2\alpha} - \frac{1}{2}\alpha e^{2\alpha} = -\frac{3}{4}$$

(b) L'intégrale représente l'opposé de l'aire comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses, pour x compris entre $-\infty$ et 0.