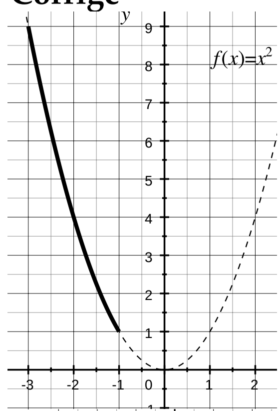
Devoir surveillé n°7



<u>Exercice n°1 :</u> ***(4 points)***

Partie A

1) Dresser le tableau de variation de la fonction carrée.

(0,5 pt) *Solution :*

x	**-∞**	**0**	**+∞**
x^2	↘	**0**	↗

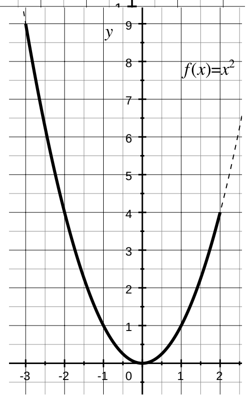
2) En s'aidant éventuellement de la première question, répondre aux questions suivantes :

a) x désigne un réel quelconque de l'intervalle [- 3 ; -1]. A quel intervalle appartient x² ?

(0,5 pt) *Solution : La fonction $f(x)=x^2$ est décroissante pour x de l'intervalle]- ∞ ; 0] (x négatif)*

Puisque $-3 \leq x \leq -1$ donc $f(-1) \leq x^2 \leq f(-3)$; c'est à dire $1 \leq x^2 \leq 9$

ainsi $f(x) = x^2$ appartient à l'intervalle [1 ; 9]



b) x désigne un réel quelconque de l'intervalle [- 3 ; 2]. A quel intervalle appartient x² ?

(1 pt) *Solution : La fonction $f(x)=x^2$ est décroissante pour x de l'intervalle]- ∞ ; 0] (x négatif)*

Puisque $-3 \leq x \leq 0$ donc $f(0) \leq x^2 \leq f(-3)$; c'est à dire $0 \leq x^2 \leq 9$

La fonction $f(x)=x^2$ est croissante pour x de l'intervalle [0 ; + ∞ [(x positif)

Puisque $0 \leq x \leq 2$ donc $f(0) \leq x^2 \leq f(2)$; c'est à dire $0 \leq x^2 \leq 4$

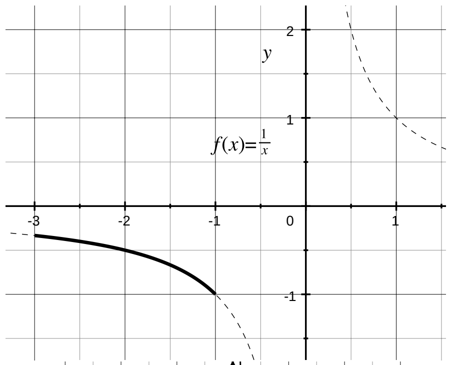
ainsi $f(x) = x^2$ appartient à l'intervalle [0 ; 9]

Partie B

1) Dresser le tableau de variation de la fonction inverse

(0,5 pt) *Solution :*

x	**-∞**	**0**	**+∞**
1/x	↘	‖	↘



2) En s'aidant éventuellement de la question précédente, répondre aux questions suivantes

(0,5 pt) a) x désigne un réel quelconque de l'intervalle [-3 ; -1]. A quel intervalle appartient 1/x ?

Solution : La fonction f(x)=1/x est décroissante pour x de l'intervalle]- ∞ ; 0] (x négatif)

Puisque $-3 \leq x \leq -1$ donc $f(-1) \leq x^2 \leq f(-3)$; c'est à dire $-1 \leq 1/x \leq -1/3$

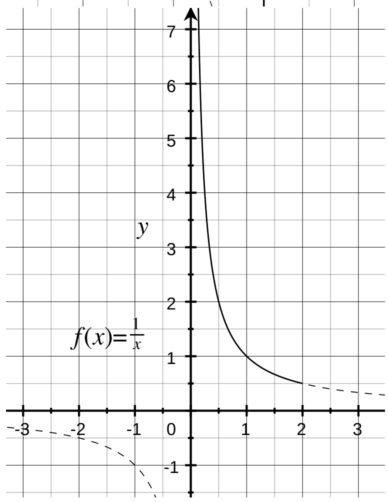
ainsi f(x) = 1/x appartient à l'intervalle [-1 ; -1/3]

(0,5 pt) b) x désigne un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 2]. A quel intervalle appartient 1/x ?

Solution : La fonction f(x)=1/x est décroissante pour x de l'intervalle [0 ; + ∞ [(x positif)

Puisque $0 < x \leq 2$ donc $f(2) < 1/x$; c'est à dire $1/2 \leq 1/x$

ainsi f(x) = 1/x appartient à l'intervalle [1/2 ; + ∞]



<u>Exercice n°2</u> ***(12 points)***

Partie A : ***(4,5 pts)***

f est une fonction polynôme du second degré dont on donne ci-contre la représentation graphique.

1) Résoudre par lecture graphique les équations ou inéquations suivantes :

(0,5 pt) (a) f(x) = 7 ***(1 pt)*** (b) f(x) < 0 ***(0,5 pt)*** (c) f(x) < -10

Solution : (a) f(x) = 7 ; *A et A'* ***S=*** $\{$ ***0 ; 4*** $\}$:(b) f(x)<0 ***S=***]***0,5 ; 3,5***[:(c) f(x) < -10 ***S=∅***

2) On sait que, pour tout nombre réel x, f(x) peut s'écrire sous la forme $f(x) = a (x – \alpha)^2 + \beta$.

(1 pt) a) Lire sur le graphique les valeurs de α et β.

Solution : La courbe est une parabole de sommet $S=(\alpha;\beta)$; *donc* $\alpha=2$ *et* $\beta=-9$; *ainsi* $f(x)=a(x-2)^2-9$:

(0,5 pt) b) Que peut-on dire de a par lecture graphique ?

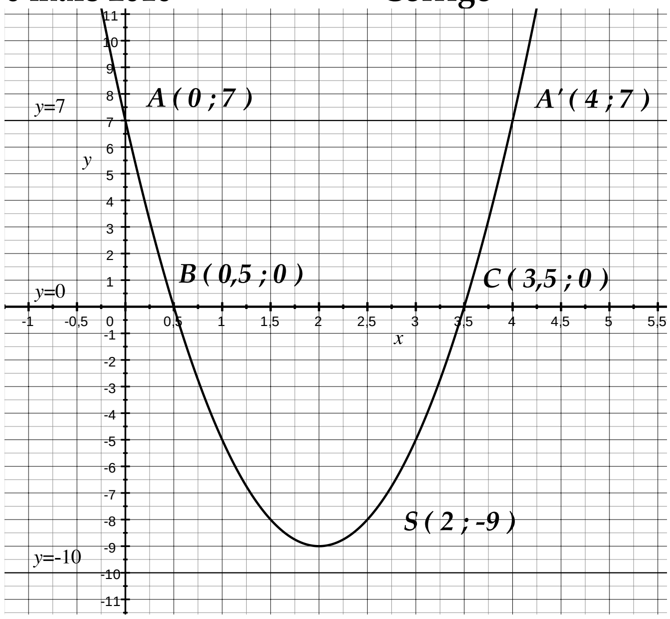
Solution : Puisque la courbe a sa concavité tournée vers les y positifs donc a positif.

(1 pt) 3) On sait, de plus, que f(1) = -5. En déduire la valeur de a.

Solution : $f(1)=-5$; *ainsi* $f(1)=5=a(1-2)^2-9=a-9 \Leftrightarrow a=9-5=4$; *donc* $f(x)=4(x-2)^2-9$

Partie B *(7,5 pts)*

Soit la fonction g définie pour tout réel x par g(x) = 4(x – 2)² - 9



1) Ecrire g(x) sous forme développée, réduite et ordonnée.

(1pt)*Solution:* $g(x)=4(x-2)^2-9=4(x^2-4x+4)-9=4x^2-16x+7$

2) En utilisant la forme canonique de g, factoriser g(x).

$$g(x)=4(x-2)^2-9=\left(2(x-2)\right)^2-3^2$$

(1pt) *Solution:* $g(x)=\left(2(x-2)-3\right)\left(2(x-2)+3\right)$

$$g(x)=(2x-7)(2x-1)$$

3) Calculer g($-\sqrt{3}$)

(1 pt) *Solution:* $g(-\sqrt{3})=4(-\sqrt{3})^2-4(-\sqrt{3})+7=12+4\sqrt{3}+7$

$$g(-\sqrt{3})=19+4\sqrt{3}$$

4) Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

(a) g(x) = 7

(1,5pt) *Solution:*

$$g(x)=4(x-2)^2-9=7$$

$$\Leftrightarrow 4(x-2)^2=16 \Leftrightarrow (x-2)^2=4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4=0 \Leftrightarrow \left((x-2)-2\right)\left((x-2)-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2-2)(x-2+2)=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \text{ donc } S=\{\,0\,;\,4\,\}$$

(b) g(x) < 0

(1,5pt) *Solution:* $g(x)<0 \Leftrightarrow (2x-7)(2x-1)<0$ $S=\left]\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right[$

Etude du signe de l'expression A(x) =(2x-7)(2x-1)

x	-∞		1/2		7/2	
signe de 2x-7		—		—	0	+
signe de 2x-1		—	0	+		+
signe de A(x)		+	0	—	0	+

(c) g(x) < -10 ***(1,5pt)*** *Solution:* $g(x)<0 \Leftrightarrow (2x-7)(2x-1)<0$

$4(x-2)^2-9<-10 \Leftrightarrow 4(x-2)^2<-1$ *(impossible car un carré est toujours positif) donc S=∅*

__Exercice 3__ ***(12 points)***

Partie A *(3 pts)*

f est une fonction homographique dont on donne la représentation graphique ci-dessus. Sa courbe représentative est composée de deux parties et ne coupe jamais les droites représentées en pointillés.

1) Résoudre par lecture graphique les équations et inéquations suivantes

(0,5 pt) (a) f(x) = -1 ***(0,5 pt)*** (b) f(x) = 2 ***(1 pt)*** (c) f(x) ≤ 3

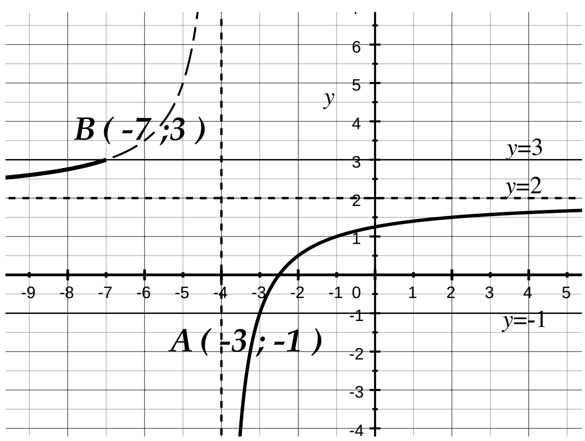
Solution : (a) f(x) = -1 ; *A* ***S=***$\{-3\}$:(b) f(x)=2 ***S=***∅ :(c) f(x) ≤ 3 *S=* $]-\infty\,;-7] \Leftrightarrow\,]-4;+\infty[$

2) Par lecture graphique, dresse le tableau de variation de cette fonction.

(***1 pt)*** *Solution :*

x	**-∞**	**-4**	
1/x	↗	‖	↗

Partie B *(9 pts)*



Soit la fonction *g* définie par : $g(x)=\dfrac{2x+5}{x+4}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition D de cette fonction

(***1 pt)*** *Solution : g est définie pour x+4≠ 0 , x≠-4*

donc D = $]-\infty\,;-4[\,\cup\,]-4\,;-\infty[$

2) Vérifier que $g(x)=2-\dfrac{3}{x+4}$ pour tout *x* de D.

(***1 pt)*** *Solution :* $g(x)=2-\dfrac{3}{x+4}=\dfrac{2(x+4)-3}{x+4}=\dfrac{2x+8-3}{x+4}=\dfrac{2x+5}{x+4}$

3) Calculer l'image par g de $\frac{1}{3}$: (***1 pt***) *Solution :* $g(\frac{1}{3})=2-\frac{3}{\frac{1}{3}+4}=2-\frac{3}{\frac{1}{3}+\frac{12}{3}}=2-\frac{3}{\frac{13}{3}}=2-\frac{9}{13}=\frac{26}{13}-\frac{9}{13}=\frac{17}{13}$

4) Déterminer les antécédents éventuels par g de : -1 et 2.

(***1 pt***) *Solution :*

$$g(x)=\frac{2x+5}{x+4}=-1 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x+4}+1=0 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x+4}+\frac{x+4}{x+4}=0 \Leftrightarrow \frac{3x+9}{x+4}=0 \Leftrightarrow 3x+9=0 \text{ et } x+4\neq 0$$

$$g(x)=\frac{2x+5}{x+4}=-1 \Leftrightarrow x=-3 \text{ et } x+4\neq 0 \text{ ; l'antécédent de -1 par g est : -3 ; } S=\{-3\}$$

$$g(x)=\frac{2x+5}{x+4}=2 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x+4}-2=0 \Leftrightarrow \frac{2x+5-2(x+4)}{x+4}=0 \Leftrightarrow \frac{2x+5-2x-8}{x+4}=0 \Leftrightarrow \frac{-3}{x+4}=0 \text{ ce qui est impossible ; } S=\varnothing$$

(***1 pt***) *Solution : 2 n'a pas d'antécédent par g*

5) Résoudre l'inéquation $g(x) \leq 3$.

(***2 pts***) *Solution :* $g(x)=\frac{2x+5}{x+4}\leq 3 \Leftrightarrow \frac{2x+5}{x+4}-3\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5-3(x+4)}{x+4}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+5-3x-12}{x+4}\leq 0 \Leftrightarrow \frac{-x-7}{x+4}\leq 0$ *Etude du signe de* $B(x)=\frac{-x-7}{x+4}$

x	$-\infty$		-7		-4		
signe de -x-7		+	0	—	|	—	
signe de x+4		—	|	—	0	+	
signe de B(x)		+	0	—	||	+	

donc $S=]-\infty\,;-7]\cup]-4\,;-\infty[$

6) Montrer que la fonction g est croissante sur l'intervalle] – 4 ; +∞[(***2 pt***) *Solution :*

Puisque $-4 < a \leq b$ *donc* $0 < a+4 \leq b+4$ *(la fonction* $f(x) = x+4$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *)*

Puisque $0 < a+4 \leq b+4$ *donc* $\frac{-3}{a+4}\leq\frac{-3}{b+4}$ *(la fonction* $f(x) = \frac{-3}{x}$ *est croissante sur* $]0;+\infty[$ *)*

Puisque $\frac{-3}{a+4}\leq\frac{-3}{b+4}$ *donc* $2+\frac{-3}{a+4}\leq 2+\frac{-3}{b+4}$ *(la fonction* $f(x) = 2+x$ *est croissante sur* $\mathbb{R}$ *)*

Puisque g conserve l'ordre donc g est croissante sur $]-4\,;+\infty[$

<u>Exercice 4</u> ***(8 points)***

Une urne contient 3 jetons rouges (R) et 2 jetons verts (V). On tire, au hasard successivement 2 jetons de l'urne, sans remise, c'est-à-dire que l'on ne replace pas dans l'urne le premier jeton tiré avant de tirer le second jeton.

1) On considère que l'ensemble des issues possibles de cette expérience est {(R,V) ; (R,R) ; (V,V) et (V,R)}.
Peut-on a priori associer à cet ensemble une loi équirépartie ? Pourquoi ?

Non ce n'est pas une loi équirépartie car il n'y a pas autant de jetons rouges que de jetons verts.

2) On numérote les jetons rouges de 1 à 3 et les jetons verts de 1 à 2. Des issues possibles sont, par exemple, (R_1,V_2) ou (R_3, V_1).

a) A l'aide d'un arbre, déterminer l'ensemble les 20 issues possibles de cette expérience et on lui associe une loi équirépartie

(***2 pts***) *Solution :*

	R2	(R1,R2)
	R3	(R1,R3)
R1	V1	(R1,V1)
	V2	(R1,V2)
	R1	(R2,R1)
	R3	(R2,R3)
R2	V1	(R2,V1)
	V2	(R2,V2)
	R1	(R3,R1)
	R2	(R3,R2)
R3	V1	(R3,V1)
	V2	(R3,V2)
	R1	(V1,R1)
	R2	(V1,R2)
V1	R3	(V1,R3)
	V2	(V1,V2)
	R1	(V2,R1)
	R2	(V2,R2)
V2	R3	(V2,R3)
	V1	(V2,V1)

b) Calculer les probabilités des événements suivants

(***1,0 pt***) R : « obtenir 2 jetons rouges » *Solution :*

Nombre de cas favorables=n(R)=6 (6 couples où les jetons sont rouges) ; p(R)=n(R)/n(E)=6/20=3/10

(***1,0 pt***) A : « obtenir au moins un jeton vert »*Solution :*

Nombre de cas favorables=n(A)=14 ; A et R sont deux évènements contraires ; p(A)=1 - p(R) =14/20=7/10

(***1,0 pt***) B : « obtenir deux jetons de même couleur »*Solution :*

Nombre de cas favorables=n(B)=8 ; p(B)=n(B)/n(E)=8/20=2/5

c) Expliciter par des phrases les événements suivants puis calculer leurs probabilités

$A \cap B$, $A \cup B$ et $\overline{A}$.

(***0,5 +0,5 pt***) *Solution :* $A \cap B$: « obtenir 2 jetons de la même couleur et au moins un jeton est vert » : « obtenir 2 jetons de couleur verte »; *p(*$A \cap B$*)=n(*$A \cap B$*)/n(E)=2/20 =1/10:*

(***0,5 +0,5 pt***) *Solution :* $A \cup B$: « obtenir 2 jetons de la même couleur ou au moins un jeton est vert » ; *p(*$A \cup B$*)=p(A)+p(B)-p(*$A \cap B$*)=14/20 + 8/20 - 2/20 = 20/20 = 1 :*

(***0,5 +0,5 pt***) *Solution :* $\overline{A}$: « obtenir aucun jeton est vert » ; *p(*$\overline{A}$*)=p(R)=6/20 = 3/10 :*

Exercice 5 (4 points)

Un chasseur tire sur une poule d'eau posée sur un canot pneumatique. La probabilité d'atteindre la poule est de 0,3 ; celle d'endommager le canot pneumatique est de 0,5 et celle de toucher les deux est de 0,1.

Solution : On note P :« le chasseur touche la poule » , B :« le chasseur touche la bateau »

donc : $P \cap B$ *: ≪ le chasseur touche les deux ≫ ;* $P \cap \overline{B}$ *: ≪ le chasseur touche la poule et pas le bateau ≫*

$\overline{P} \cap B$ *: ≪ le chasseur touche le bateau et pas la poule ≫ ;* $\overline{P} \cap \overline{B}$ *: ≪ le chasseur ne touche ni l'un ni l'autre ≫*

Calculer

a) la probabilité que le chasseur atteigne la poule ou le canot pneumatique.

(***1 pt)*** *Solution :* $P \cup B$; $p(P \cup B) = p(P) + p(B) - p(P \cap B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}7$

b) la probabilité que la poule soit touchée et le canot pneumatique indemne.

(***0,5 pt)*** *Solution : l'évènement P: « le chasseur touche la poule» se décompose en deux évènements incompatibles :* $P \cap B$ *« le chasseur touche la poule et le bateau» et* $P \cap \overline{B}$ *« le chasseur touche la poule mais pas le bateau» ;*

$P \cap \overline{B}$; $p(P \cap \overline{B}) = p(P) - p(P \cap B) = 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}2$;

c) la probabilité que le canot pneumatique soit touché et que la poule s'envole.

(***0,5 pt)*** *Solution : l'évènement B: « le chasseur touche le bateau» se décompose en deux évènements incompatibles :* $P \cap B$ *« le chasseur touche la poule et le bateau» et* $\overline{P} \cap B$ *« le chasseur ne touche pas la poule mais touche le bateau» ;*

$\overline{P} \cap B$; $p(\overline{P} \cap B) = p(B) - p(P \cap B) = 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$;

d) la probabilité que la poule et le canot pneumatique soient épargnés.

(***0,5 pt)*** *Solution : les évènements* $P \cup B$ *: « le chasseur touche le bateau ou la poule» et* $\overline{P} \cap \overline{B}$ *« le chasseur ne touche ni la poule ni le bateau» sont contraires ;*

$p(\overline{P} \cap \overline{B}) = 1 - p(P \cap B) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$;

(***1,5 pt)*** *Solution :*

	B	$\overline{B}$	Total
P	$p(P \cap B) = 0{,}1$	$p(P \cap \overline{B}) = 0{,}2$	0,3
$\overline{P}$	$p(\overline{P} \cap B) = 0{,}4$	$p(\overline{P} \cap \overline{B}) = 0{,}3$	0,7
Total	0,5	0,5	1

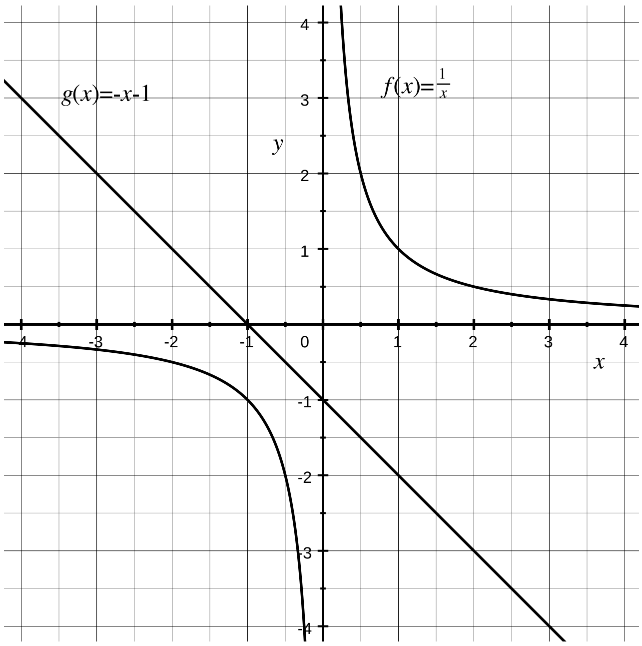
Exercice 6 (Bonus) (4 points)

On a tracé ci-dessus la représentation graphique de la fonction inverse

On veut dans cet exercice résoudre l'équation : $\dfrac{1}{x} = -x - 1$.

1) En utilisant la représentation graphique ci-dessus, faire une conjecture sur les solutions de cette équation

Solution : L'hyperbole et la droite ne sont pas sécantes , donc l'équation f(x)=g(x) n'aura pas de solution



2) Prouver cette conjecture.*Solution :*

$$f(x)=\frac{1}{x}=-x-1=g(x) \text{ et } x \neq 0 \iff \frac{1}{x}+x+1=0 \text{ et } x \neq 0$$

$$\iff \frac{1+x^2+x}{x}=0 \text{ et } x \neq 0 \iff 1+x^2+x=0 \text{ et } x \neq 0$$

Soit $A(x) = 1+x^2+x = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}+x^2+x = \dfrac{3}{4} + \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2$;

pour tout x réel , $A(x) \geq \dfrac{3}{4} > 0$

donc $1+x^2+x > 0$ *; ainsi* $1+x^2+x \neq 0$;

l'équation f(x)=g(x) n'a pas de solution $S=\emptyset$

Aide : on pourra utiliser à une étape de la résolution de cette équation l'égalité $\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \dfrac{1}{4}$