Seconde 09 - Année Scolaire 2008-2009
Chapitre n°10 : Vecteurs ; page 181 - 204
Programme d'étude :

PROGRESSION :

Leçon n°1 : Vecteurs ; translation de vecteur AB , vecteurs égaux,
Activité : construire le représentant d'un vecteur , utiliser les vecteurs pour démontrer.

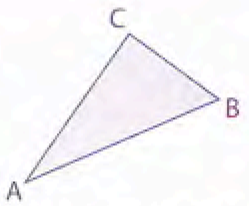
Leçon n°2 : Coordonnées d'un vecteur ;
Activité : représenter un vecteur de coordonnées connues , démontrer avec les coordonnées.

Leçon n°3 : Addition de vecteurs ; somme de vecteurs, constructions géométriques,
Activité : utiliser les coordonnées de vecteurs, construire géométriquement, réduire une somme de vecteurs.

Leçon n°4 : Multiplication d'un vecteur par un nombre réel ; produit d'un vecteur par un nombre réel, vecteurs colinéaires,
Activité : placer un point défini par une égalité vectorielle, traduire par une égalité vectorielle, démontrer l'alignement de deux points.

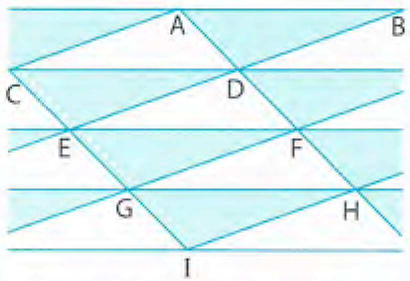
Notion de vecteur

1 ABC est le triangle ci-contre.



a) La translation qui transforme A en B, transforme C en D.
Faire la figure et construire le point D.
b) La translation qui transforme A en C, transforme B en E. Construire le point E.

2 La figure ci-dessous est constituée de parallélogrammes.



Déterminer le transformé de chacun des points A et E par la translation de vecteur :
a) $\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{GI}$ **c)** $\overrightarrow{DH}$

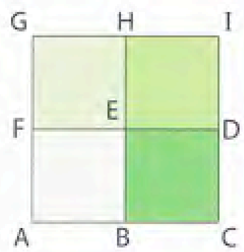
9 ABCD est un parallélogramme.
I est le symétrique de B par rapport à A et J est le symétrique de D par rapport à C.
Démontrer que AICJ est un parallélogramme.

10 ABC est un triangle.
E et F sont les points tels que $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC}$.
Quelle est la nature du quadrilatère AEBF ?

5 Dire pour chaque affirmation, si elle est vraie ou fausse.
1. ABCD est un parallélogramme.
a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **b)** $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ **c)** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

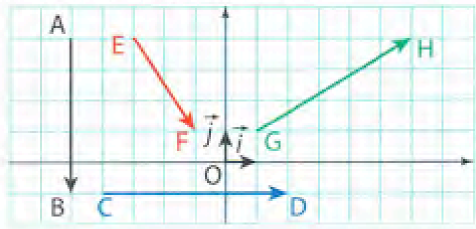
2. La translation qui transforme E en F, transforme aussi G en H.
a) EFGH est un parallélogramme.
b) [EG] et [FH] ont même milieu.
c) $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH}$.

6 La figure ci-contre est constituée de carrés.
Déterminer le représentant d'origine :
a) F du vecteur $\overrightarrow{AB}$;
b) E du vecteur $\overrightarrow{BD}$;
c) D du vecteur $\overrightarrow{HF}$.



Coordonnées d'un vecteur

12 Lire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}$ dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ ci-dessous.



16 Dans un repère, on donne les points :
$A(-2 ; 2)$, $B(1 ; -3)$, $C(9 ; -1)$ et $D(6 ; 4)$.
a) Calculer les coordonnées des vecteurs :
• $\overrightarrow{AB}$ • $\overrightarrow{AD}$ • $\overrightarrow{AC}$ • $\overrightarrow{DC}$
b) Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?
c) Quelles sont les coordonnées du point d'intersection des diagonales [AC] et [BD] ?

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 2, page 187.

Seconde 09 - Année Scolaire 2008-2009
Chapitre n°10 : Vecteurs ; page 181 - 204
Programme d'étude :

Addition de vecteurs

19 Dans un repère, on donne les points :

A(3 ; 3), B(2 ; –1) et C(5 ; 4).

Déterminer les coordonnées du point D tel que :

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.$$

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 1, page 189.

20 Dans un repère, on donne les points :

A(–2 ; 4), B(–3 ; 5) et D(4 ; 6).

Déterminer les coordonnées du point C tel que ABCD soit un parallélogramme des deux façons suivantes :

a) utiliser l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$;

b) utiliser l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

22 Dans un repère, on considère les points :

A(2 ; –1), B(3 ; 4) et C(–5 ; 2).

Calculer les coordonnées du point M tel que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Aide : Noter (x ; y) les coordonnées de M et écrire les coordonnées de $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$.

Traduire l'égalité ci-dessus par une équation d'inconnue x et une équation d'inconnue y.

28 ABC est un triangle.

Réduire l'écriture du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$.

Conseil : se reporter à l'exercice résolu 3, page 189.

29 ABCD est un parallélogramme.

Démontrer que :

a) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ **b)** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

c) $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

*Aide : **a)** Utiliser par exemple $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, puis la relation de Chasles.*

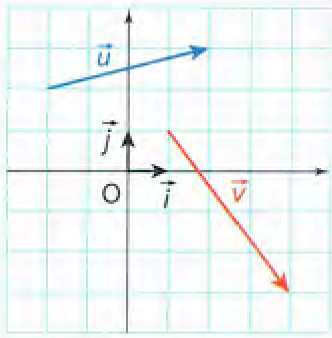
*   **b)** Utiliser par exemple $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.*

30 Démontrer que quels que soient les points A, B, C, D et E :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}.$$

Multiplication d'un vecteur par un réel

31 Déterminer les coordonnées des vecteurs :



a) $\vec{u}$ **b)** $2\vec{u}$

c) $-3\vec{u}$ **d)** $\frac{1}{4}\vec{u}$

e) $\vec{v}$ **f)** $5\vec{v}$

g) $\frac{2}{3}\vec{v}$ **h)** $-\frac{1}{4}\vec{v}$

i) $4\vec{u} - 3\vec{v}$

32 Dans un repère, on donne les points :

A(–2 ; 5), B(1 ; –3) et C(2 ; 2).

Calculer les coordonnées des points D, E, F tels que :

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ **b)** $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **c)** $2\overrightarrow{FA} = 3\overrightarrow{FB}$

34 [AB] est un segment de longueur 5 cm.

Placer les points C, D, E et F tels que :

a) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$

c) $\overrightarrow{AE} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ **d)** $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

35 A et B sont deux points distincts donnés.

Placer les points M, N, P, Q tels que :

a) $\overrightarrow{AM} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{AB}$ **c)** $\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

36 [AB] est un segment de longueur 8 cm.

On se propose de construire un point M tel que :

$$\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

a) Démontrer, en utilisant la relation de Chasles, que l'égalité ci-dessus s'écrit aussi :

$$4\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}.$$

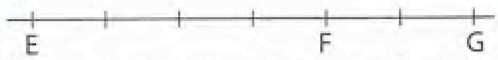
b) En déduire l'expression de $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et construire le point M.

38 I est le milieu du segment [AB].

Dans chaque cas, déterminer le réel λ tel que :

a) $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{AB}$ **b)** $\overrightarrow{AI} = \lambda\overrightarrow{IB}$ **c)** $\overrightarrow{BI} = \lambda\overrightarrow{AB}$

39 E, F, G sont trois points de la droite graduée ci-dessous.



Dans chaque cas, déterminer le réel λ tel que :

a) $\overrightarrow{EF} = \lambda\overrightarrow{EG}$ **b)** $\overrightarrow{FG} = \lambda\overrightarrow{FE}$ **c)** $\overrightarrow{GE} = \lambda\overrightarrow{GF}$

Travaux pratiques

52 Alignement de points

OBJECTIF Utiliser des outils logiciels, puis conduire une démonstration.

ABCD est un parallélogramme. E et F sont les points tels que :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \text{ et } \overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}.$$

On se propose d'étudier l'alignement des points A, E, F.

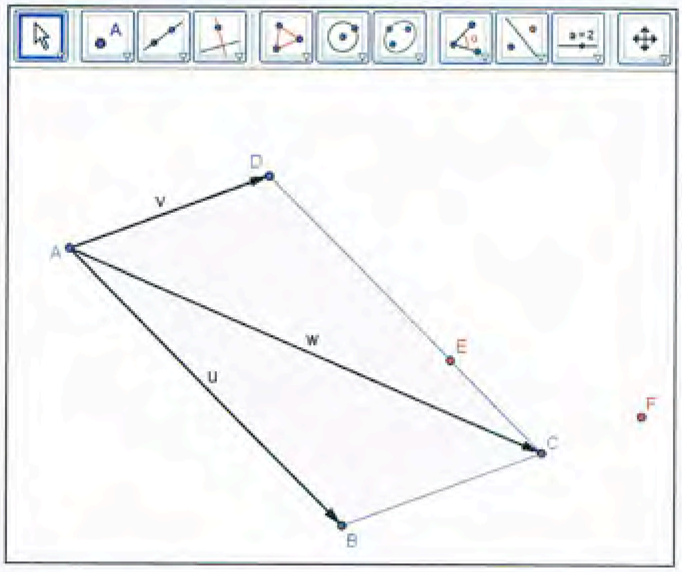
1. Conjecture

a) À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :
- placer trois points A, B, D non alignés ;
- construire les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$;
- placer le point C tel que $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$.

(Avec GeoGebra par exemple, on utilisera l'icône « Représentant » .) ;
- tracer le quadrilatère ABCD.

b) Construire les points E et F.

(Avec GeoGebra, on construira d'abord les vecteurs $\vec{s} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ et $\vec{t} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$.)



c) Déplacer les points A, B, D et conjecturer la position des points A, E, F.

2. Preuve

a) En écrivant $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}$, exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b) Exprimer $\overrightarrow{AF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c) Conclure sur la position des points A, E, F.

53 Génération de parallélogrammes

OBJECTIF Pratiquer une activité expérimentale, puis conduire une démonstration.

ABCD est un parallélogramme et k désigne un réel.
P, Q, R, S sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BQ} = k\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CR} = k\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{DS} = k\overrightarrow{DA}.$$

On se propose d'étudier la nature du quadrilatère PQRS selon les valeurs de k.

1. Conjecture

a) Avec un logiciel de géométrie dynamique, tracer un parallélogramme ABCD.

b) Créer un paramètre k libre dans l'intervalle $[-5 ; 5]$.
(Avec GeoGebra par exemple, utiliser l'icône .)

c) Créer les points P, Q, R, S et tracer le quadrilatère PQRS.

d) Piloter le réel k et conjecturer la nature de PQRS.

2. Preuve

a) En écrivant $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ}$, exprimer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

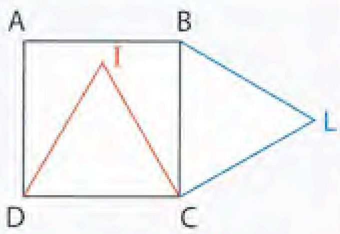
b) Exprimer de même $\overrightarrow{SR}$ en fonction de $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

C) Conclure sur la nature de PQRS.

54 Carré et triangle équilatéraux

OBJECTIF Utiliser les coordonnées pour démontrer l'alignement de points.

Sur la figure ci-contre ABCD est un carré, BCL et DIC sont des triangles équilatéraux.
On se propose d'étudier l'alignement des points A, I, L.



Pour cela, on considère le repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$.
Dans ce repère, les coordonnées de D, C et A sont :

$$D(0 ; 0),\ C(1 ; 0),\ A(0 ; 1).$$

a) Quelles sont les coordonnées de B ?

b) Utiliser les propriétés des triangles équilatéraux pour déterminer les coordonnées de I et de L.

c) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$;

d) Conclure sur l'alignement des points A, I, L.

Seconde 09 - Année Scolaire 2008-2009
Chapitre n°10 : Vecteurs ; page 181 - 204
Programme d'étude :

Pour réviser

85 Réduire une écriture

ABCD est un quadrilatère.
Réduire l'écriture de chaque vecteur avec la relation de Chasles, puis dessiner un représentant de ce vecteur.

a) $\vec{u} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$

b) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}$

c) $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$

Conseils
- Revoir le cours § 2, page 188.
- Revoir l'exercice résolu 3, page 189.

86 Démontrer avec la relation de Chasles

ABCD est un parallélogramme de centre O.
Démontrer que pour tout point M,

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}.$$

Conseils
Utiliser le fait que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$ et procéder de même pour les autres vecteurs.

87 Démontrer un alignement

ABCD est un parallélogramme.
E et F sont les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.
O est le milieu du segment [AC].

a) Faire une figure.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$.

c) En déduire que les points O, E, F sont alignés.

Conseils
a) Revoir le cours § 1, page 190 et l'exercice résolu 1, page 191.
c) Revoir le cours § 2, page 190. On pourra penser à écrire $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE}$.

88 Démontrer un parallélisme

Dans un repère, on donne les points :

A(–1 ; 3), B(2 ; 5), C(4 ; –3) et D(–11 ; –13).

Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Conseils
- Revoir le cours § 2, page 190.
- Revoir l'exercice résolu 3, page 191.

S'initier à la logique

76 Implication - Équivalence

H et H' sont deux propositions.
- On dit que H **implique** H' lorsque si H est vraie, alors H' est vraie.
- On dit que les propositions H et H' sont **équivalentes** lorsque H implique H' **et** H' implique H.

Dans chaque cas, dire si « H implique H'» ou si « H' implique H » ou si « H et H' sont équivalentes ».

a) H : « C est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$. »
H' : « ABCD est un parallélogramme. »

b) H : « ABCD est un parallélogramme de centre O. »
H' : « O est le milieu du segment [AC]. »

c) H : « $\overrightarrow{EF}(3 ; 4)$. »
H' : « E(0 ; 2) et F(3 ; 6). »

d) H : « Les points I, J et K sont alignés. »
H' : « $\overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IK}$. »

77 Condition nécessaire, suffisante

Sur un forum mathématique, P31415 a posté la question suivante :
« Pour demain, je dois faire un exercice où on me demande de démontrer que ABCD est un parallélogramme. Je ne sais pas comment m'y prendre. »
Prof répond : « Connais-tu une condition suffisante pour que ABCD soit un parallélogramme ? »
P31415 : « Non ! »
M271 : « $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. »
X007 : « AB = DC. »
Z97910 : « $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ colinéaires. »
GNI : « (AD) et (BC) parallèles. »
$E = MC^2$: « $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. »
A000 : « $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ».

1. a) Parmi ces conditions, certaines sont effectivement **suffisantes**. Lesquelles ?
b) En proposer une autre.

2. a) Parmi les conditions ci-dessus, certaines ne sont que **nécessaires**. Lesquelles ?
b) En proposer une autre.