$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

$$\frac{2}{\sqrt{n}}$$

PROBABILITÉS - PRÉSENTATION - VOCABULAIRE

Ne pouvant raisonnablement enfermer le concept de hasard dans une définition formelle, les mathématiciens ont banni ce terme de leur vocabulaire.

Cela ne les empêche pas d'utiliser l'adjectif "aléatoire" dont la racine latine (sans doute plus noble) désigne, tout comme le mot arabe " az.zahr" , le jeu de dés.

Pourtant c'est précisément l'objet de la théorie des probabilités (appelée calcul de probabilités) que d'élaborer une théorie mathématique apte à décrire des phénomènes où l'on admet l'intervention du hasard.

Epreuve - Expérience aléatoire : notée E

✍ Ce terme décrira **tout concours de circonstances** (expérience, observation, mesure, ...) qui conduit à des éventualités **bien définies mais dont le résultat est imprévisible**.

✍ Ces éventualités sont appelées aussi **issues** de l'épreuve.

On pourra appeler expérience aléatoire la réalisation de une ou plusieurs épreuves.

Evènement - Evènement élémentaire :

Un **évènement** est un ensemble **bien définies d'éventualités (issues de l'épreuve)**. (du latin evenire : arriver).

☞L'ensemble de toutes les issues d'une épreuve **est noté E**

E est appelé **évènement certain** ou **univers associé à l'épreuve** $\mathscr{E}$.

☞Une issue sera appelée **évènement élémentaire** .

Un évènement A est donc constitué d'évènements élémentaires.

☞**Le nombre de ces évènements élémentaires est noté : n(A)**

L'univers **E** associé à l'épreuve $\mathscr{E}$est constitué de tous les évènements élémentaires.

☞**Le nombre de tous les évènements élémentaires est noté : n(E)**

Probabilité :

✍ **La probabilité d'un évènement mesure le degré de certitude qu'on a de le voir se réaliser.**

Assez naturellement, on attribue la probabilité 0 à un évènement impossible et la probabilité 1 à un évènement dont la réalisation est certaine.

L'échelle des valeurs possible étant fixée, comment peut-on évaluer la probabilité d'un évènement donné ? Cette question admet plusieurs types de réponses suivant la nature de l'expérience aléatoire considérée.

Principe d'homogénéité et de symétrie :

S'il paraît plausible d'admettre que toutes les issues d'une épreuve E sont également vraisemblables, on admettra que la probabilité de l'évènement A est : $p(A)=\dfrac{n(A)}{n(E)}$

Cette première approche s'avère très vite peu satisfaisante et on doit faire appel à une définition de nature statistique et admettre le principe des fréquences.

Principe des fréquences :

Considérons une épreuve E et un évènement A ; on réalise N fois l'épreuve ; l'évènement A ayant lieu n_A fois, On dira que la fréquence relative *f* de l'évènement A est : $p(A)=f=\dfrac{n_A}{N}$

D'où la définition de p(A) :

Loi de probabilité :

✍ **La loi de probabilité est la fonction qui à tout évènement élémentaire noté x_i associe sa probabilité notée p_i**

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Afin d'illustrer ce vocabulaire des probabilités nous allons considérer l'expérience aléatoire sui

E **: « tirer une boule dans un sac contenant 12 boules numérotées de 1 à 12 »**

Une issue de l'expérience :

E : univers associé à l'expérience aléatoire E

E = { **}**

<u>Evènements :</u>

Un **évènement** est ensemble bien défini d'issues de l'expérience aléatoire E .

Exemple : A est l'évènement Obtenir un nombre pair

A : « Obtenir un nombre pair » ***présentation de l'évènement en <u>compréhension</u>***

A = { x ; x est un nombre pair } ***présentation de l'évènement en <u>compréhension</u>***

A = { ; ; ; ; ; } ***présentation de l'évènement en <u>extension</u>***

<u>Evènement élémentaire :</u>

C'est un évènement n'ayant qu'un seul résultat : l'ensemble n'a alors qu'un seul élément.

Exemple : S « Obtenir un 7»

S = { 7 } ;

<u>Intersection d'évènements $A \cap B$:</u>

C'est un évènement formé par l'ensemble des résultats communs aux deux évènements : dans le 1er **et** dans le 2ème évènement.

Exemple :

A : « Obtenir un nombre pair » ; A = { ; ; ; ; ; } ;

B : « Obtenir un nombre multiple de 3 » ; B = { ; ; ; ; }

$A \cap B$: « Obtenir un nombre pair et un multiple de 3 »

$A \cap B$ = { ; } ;

	A	
B		

<u>Réunion d'évènements $A \cup B$:</u>

C'est un évènement formé par l'ensemble des résultats des deux évènements : dans le 1er **ou** dans le 2ème évènement (on ne répète jamais les éléments qui sont en communs).

$A \cup B$: « Obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 »

$A \cup B$ = { ; ; ; ; ; ; ; ; }

<u>Evènements disjoints ou incompatibles :</u>

Ce sont deux évènements qui n'ont **pas de résultats en commun** : leur intersection est vide.

Exemple : C : « Obtenir un nombre supérieur strictement à 10 »

C = { ; } ;

D : « Obtenir un nombre inférieur strictement à 6 »

D = { ; ; ; ; } ;

$C \cap D$ = ;

<u>Evènements contraires :</u>

Ce sont deux évènements disjoints mais dont la réunion forme la **totalité** des résultats possibles. Les résultats favorables de l'un sont les résultats défavorables de l'autre.

Exemple : A : « Obtenir un nombre pair »

A = { ; ; ; ; ; } ;

F : « Obtenir un nombre impair »

F = { ; ; ; ; ; } ;

$A \cap F$ = ;

$A \cup F$ = ;

	A	
B		

Notation : l'évènement contraire de A est noté $\overline{A}$

	A		Total
B			
Total			

Problème du Grand Duc de Toscane

Expérience aléatoire :

Lancé de trois dés :

Variable aléatoire

Somme des chiffres sur la face supérieure des dés

Somme	Cas favorables	Nombre de cas favorables		Probabilité
3	111;	1		1/216
4	112;	3		1/72
5	113;122;	6	3+3	1/36
6	114;123;222;	10	3+6+1	5/108
7	115;124;133;223;	15	3+6+3+3	5/72
8	116;125;134;224;233;	21	3+6+6+3+3	7/72
9	126;135;144;225;234;333;	25	6+6+3+3+6+1	25/216
10	136;145;226;235;244;334;	27	6+6+3+6+3+3	1/8
11		27		1/8
12		25		25/216
13		21		7/72
14		15		5/72
15		10		5/108
16		6		1/36
17	566;	3		1/72
18	666;	1		1/216
		216		

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)					
3	(3;1)					
4	(4;1)					
5	(5;1)					
6	(6;1)					

I LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI :

Exemple 1 :

ÉNONCÉ : On tire au hasard une boule dans une urne contenant 10 boules rouges et 20 boules noires. Définir une loi de probabilité sur l'ensemble des tirages possibles.

Exemple 2 :

ÉNONCÉ : Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire au hasard une première boule que l'on remet dans l'urne, puis une seconde boule. On forme un nombre à deux chiffres qui a pour chiffre des dizaines le résultat du premier tirage et pour chiffre des unités le résultat du second tirage.

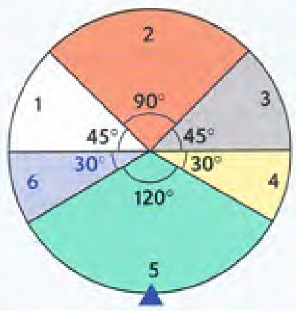
a) Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.

b) Définir une loi de probabilité sur E.

II PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT :

Exemple 4 :

ÉNONCÉ : Une roue est partagée en six secteurs comme indiqué sur le dessin ci-contre. Une expérience aléatoire consiste à faire tourner la roue et à noter le numéro du secteur sur lequel elle s'immobilise. La roue étant bien équilibrée, on associe à chaque issue une probabilité proportionnelle à l'angle du secteur angulaire correspondant.



a) Préciser l'ensemble E des issues de cette expérience aléatoire.

b) Déterminer une loi de probabilité sur E pour modéliser l'expérience.

c) Calculer la probabilité des événements :

A : « le numéro est pair », B : « le numéro est inférieur ou égal à 3 » et C : « le numéro est un multiple de 3 ».

Exemple 5 :

ÉNONCÉ : On tire au hasard une carte dans un jeu classique de 32 cartes. On s'intéresse à la couleur et à la valeur de la carte.

Calculer la probabilité des événements :

a) A : « La carte tirée est un roi »

b) B : « La carte tirée est un trèfle »

c) C : « La carte tirée est une figure »

Exemple 6 :

ÉNONCÉ : Dans un club, plusieurs activités sont proposées dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 pratiquent les deux sports.

Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

a) pratique le tir à l'arc ? le golf ?

b) pratique l'un au moins des deux sports ?

c) ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

5 On lance deux dés cubiques équilibrés numérotés de 1 à 6 ; l'issue de l'expérience aléatoire est le plus grand des deux numéros sortis.
Utiliser un tableau à double entrée pour préciser la loi de probabilité de l'expérience aléatoire.

6 Une urne contient quatre boules numérotées de 1 à 4. On tire au hasard une première boule de l'urne puis, sans la remettre, on tire une seconde boule. On note leurs numéros.
Utiliser un arbre pour préciser la loi de probabilité de l'expérience aléatoire.

7 On dispose d'un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Une étude statistique conduit à l'estimation suivante :
- les faces de 1 à 5 ont la même probabilité de sortie ;
- la probabilité d'obtenir la face 6 est 0,3.

Déterminer la probabilité de sortie de chaque face.

38 Le tableau suivant présente la répartition, en pourcentages, de la population en France par sexe et âge au 01/01/2009.

En %	Femmes	Hommes	Ensemble
Moins de 15 ans	17,5	19,5	18,5
15-24 ans	12,1	13,3	12,7
25-34 ans	12,2	12,8	12,5
35-44 ans	13,8	14,3	14,0
45-54 ans	13,4	13,7	13,5
55-64 ans	12,2	12,3	12,2
65-74 ans	8,2	7,5	7,9
75 ans ou plus	10,6	6,6	8,7
Ensemble	**100,0**	**100,0**	**100,0**

Source : Insee, estimations de population (résultats provisoires arrêtés fin 2008).

On assimile les probabilités aux fréquences observées.

a) On désigne un individu au hasard dans la population concernée.
Déterminer la probabilité de chacun des événements :
- A : « La personne est âgée de 24 ans au plus » ;
- B : « La personne est âgée de 64 ans au plus » ;
- C : « La personne est âgée de 65 ans ou plus ».

b) On désigne une personne au hasard parmi les femmes. Déterminer la probabilité de l'événement F : « La femme est âgée de 65 ans ou plus ».

c) On désigne une personne au hasard parmi les hommes.
Déterminer la probabilité de l'événement G : « L'homme est âgé de 65 ans ou plus ».

14 On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois de suite une pièce équilibrée : PFP est un exemple d'issue (avec P pour Pile et F pour face).

a) Utiliser un arbre pour obtenir l'ensemble E de toutes les issues.

b) Préciser la loi de probabilité sur E.

c) Calculer la probabilité de chacun des événements :
- A : « Obtenir une seule fois Pile » ;
- B : « Obtenir exactement deux fois Pile » ;
- C : « Obtenir exactement trois fois Pile ».

15 Pour jouer à la version française du Scrabble, on dispose d'un sac contenant 102 jetons : 2 jokers (qui rapportent 0 point) et 26 lettres selon la répartition suivante :

A_1	B_3	C_3	D_2	E_1	F_4	G_2	H_4	I_1	J_8	K_{10}	L_1	M_2
9	2	2	3	15	2	2	2	8	1	1	5	3

N_1	O_1	P_3	Q_8	R_1	S_1	T_1	U_1	V_4	W_{10}	X_{10}	Y_{10}	Z_{10}
6	6	2	1	6	6	6	6	2	1	1	1	1

Par exemple, on trouve 9 jetons comportant la lettre A qui rapporte 1 point (nombre noté en indice).
On tire un jeton au hasard dans le sac.
Donner la probabilité de chacun des événements :
- A : « Le jeton est un E » ;
- B : « Le jeton est une voyelle » ;
- C : « Le jeton rapporte 10 points » ;
- D : « Le jeton rapporte 1 point » ;
- E : « Le jeton rapporte 2 points » ;
- F : « Le jeton est une voyelle qui rapporte au minimum 2 points ».

11 La répartition des groupes sanguins dans la population française est présentée dans le tableau suivant.

		Groupe sanguin			
		O	A	B	AB
Rhésus	Rh +	37 %	39 %	7 %	2 %
	Rh −	6 %	6 %	2 %	1 %

L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard une personne dans cette population. On assimile les probabilités aux fréquences observées.
Quelle est la probabilité de chacun des événements :
- A : « La personne est du groupe A » ?
- Rh + : « La personne est de rhésus positif » ?
- AB − : « La personne est du groupe AB rhésus négatif » ?

Exercice :

Une boîte contient 7 jetons :
☞ cinq jetons sont de forme carrée, 2 sont rouges , 3 sont verts ;
☞ deux jetons sont de forme triangulaire, l'un est rouge , l'autre est vert ;

Expérience aléatoire :

Tirer au hasard , successivement et sans remise, deux jetons dans la boîte.

Issue :

① Présenter une issue de l'expérience.

Univers :

② Calculer n(Ω) le nombre de cas possibles.

Evènements :

On considère les 3 évènements suivants :
A_1 : «les 2 jetons obtenus sont rouges » ;
A_2 : «les 2 jetons obtenus sont verts » ;
A : «les 2 jetons obtenus sont de même couleur » ;

③ Calculer la probabilité de chacun des évènements.

On considère l'évènement suivant :
B : «les 2 jetons obtenus sont de même forme » ;

④ Calculer la probabilité de l'évènement B.

On considère les évènements $A \cup B$ et $A \cap B$:

④ Ecrire les évènements en compréhension.
⑤ Calculer la probabilité de $A \cup B$ et $A \cap B$.

Exercice :

Une boîte contient 7 jetons :
☞ cinq jetons sont de forme carrée, 2 sont rouges , 3 sont vets ;
☞ deux jetons sont de forme triangulaire, l'un est rouge , l'autre est vert ;

Expérience aléatoire :

Tirer au hasard , successivement et sans remise, deux jetons dans la boîte.

Issue :

① Présenter une issue de l'expérience.

Univers :

② Calculer n(Ω) le nombre de cas possibles.

Evènements :

On considère les 3 évènements suivants :
A_1 : «les 2 jetons obtenus sont rouges » ;
A_2 : «les 2 jetons obtenus sont verts » ;
A : «les 2 jetons obtenus sont de même couleur » ;

③ Calculer la probabilité de chacun des évènements.

On considère l'évènement suivant :
B : «les 2 jetons obtenus sont de même forme » ;

④ Calculer la probabilité de l'évènement B.

On considère les évènements $A \cup B$ et $A \cap B$:

④ Ecrire les évènements en compréhension.
⑤ Calculer la probabilité de $A \cup B$ et $A \cap B$.