Première STL 2 - Année Scolaire 2009-2010
Chapitre n°7 : Polynômes du second degré -
Forme canonique et parabole page 166 - 187

Avant-Propos:

Une fonction ayant pour expression $f(x) = a\,x^2 + bx + c$,
peut également s'écrire $f(x) = a\,(x-\alpha)^2 + \beta$.

La représentation graphique de f est *une parabole de sommet* $S(\alpha\,;\beta)$.

Cette valeur α correspond à l'abscisse du sommet de la parabole ; $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$

Rappel :

Soit $p(x) = a\,x^2 + bx + c$ polynôme (trinôme) du second degré que l'on appellera aussi trinôme.

Si la quantité : $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$

alors $p(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$; $x_1 = -\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = -\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Les exercices d'entraînement :

Formes canoniques ;
Ex n°10 de la feuille de route ; ex n°28 page 201 ;

Factorisations et équations ;
Ex n°68 à 72 page 204 ;
Ex n°73 à 78 page 204 ;

Signe du polynôme ;
Ex n°52 de la feuille de route ;

Devoir maison :
Ex n°52 de la feuille de route ;
Exclusion du cours :
Exercice n°89 feuille de route , ex n°54 à 61
feuille de route ;

Exemple de recherche d'extremum

28 *Le bénéfice maximal*

Le bénéfice B en francs réalisé par une société fabriquant du matériel pour les laboratoires pour un nombre q d'articles produits et vendus est donné par la relation :
$B(q) = -28\,000 + 350q - 0{,}7q^2$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[100, 400]$ par :
$f(x) = -0{,}7x^2 + 350x - 28\,000$.
Étudier les variations de f sur l'intervalle $[100, 400]$.

2. Déduire du **1.** le nombre d'articles pour lequel l'entreprise réalisera le bénéfice maximal. Quel sera, dans ce cas, ce bénéfice ?

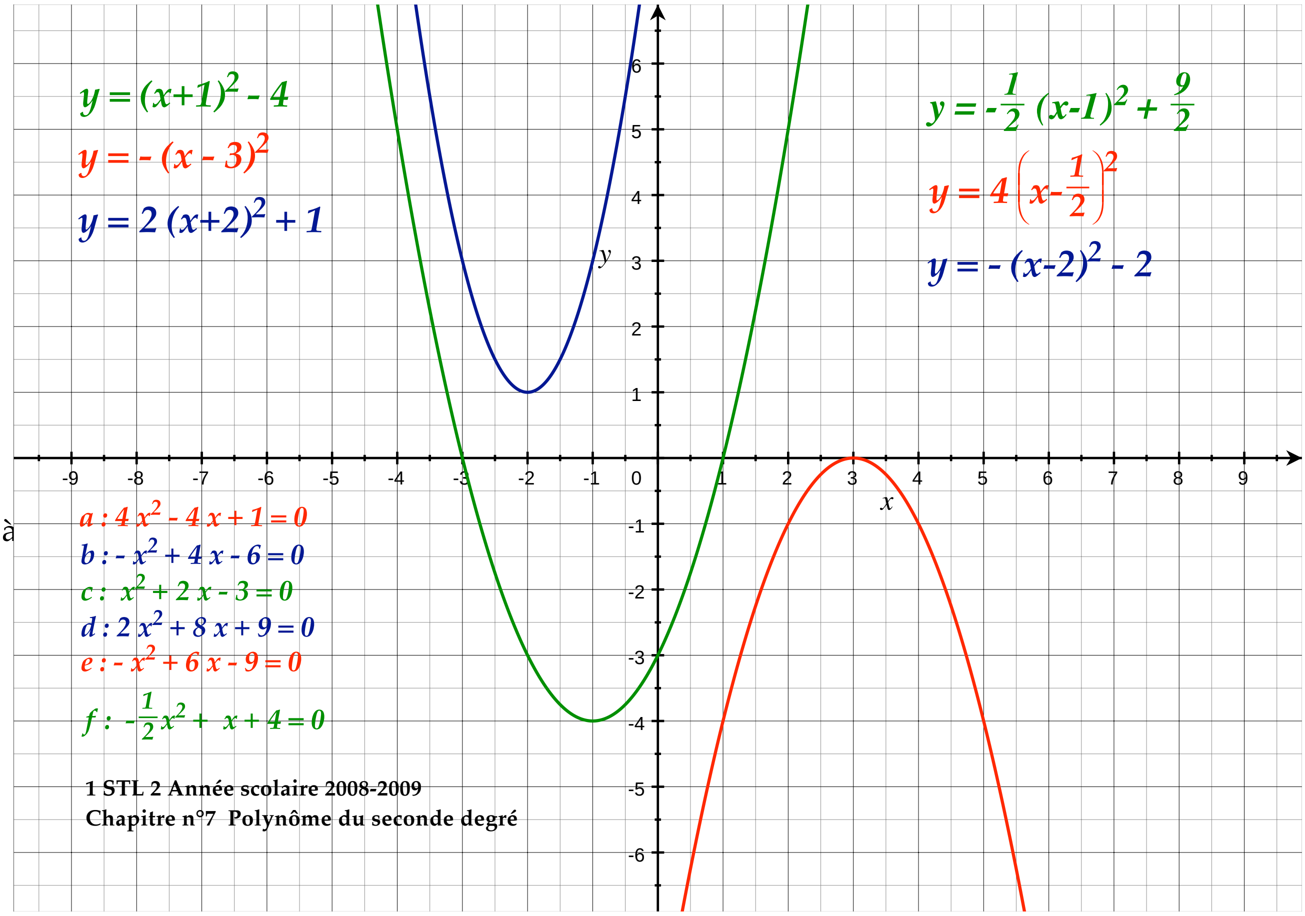
Résolution algébrique d'une équation du second degré

Sans employer les formules de résolution, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.
(Exercices 68 à 72)

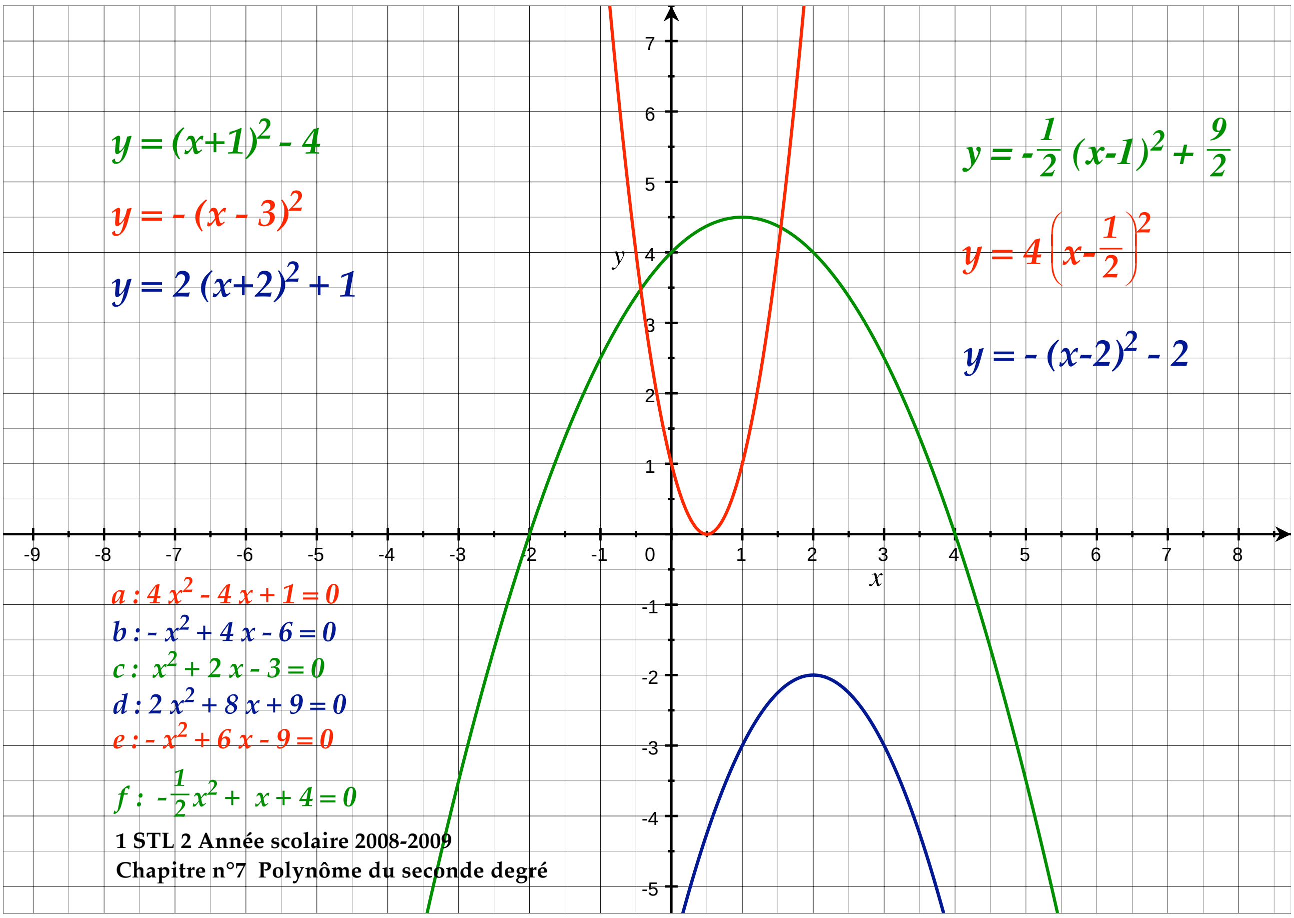
68 $x^2 - 4x = 0$. **69** $2x^2 + 3 = 0$.
70 $-x^2 + 6x - 9 = 0$. **71** $3x^2 - 5 = 0$.
72 $(2x-5)^2 - 9 = 0$.

En appliquant les formules de résolution, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations, d'inconnue x, q ou t, suivantes. Dans le cas de solutions s'écrivant à l'aide du symbole $\sqrt{\ }$, donner une valeur approchée des résultats 10^{-2} près.
(Exercice 73 à 79)

73 $6x^2 + 5x - 4 = 0$. **74** $2x^2 + 3x - 5 = 0$.
75 $4x^2 + 3x - 1 = 0$. **76** $9q^2 - 6q + 1 = 0$.
77 $4t^2 - 3t - 2 = 0$. **78** $x^2 + x + 2 = 0$.


$y = (x+1)^2 - 4$
$y = -(x-3)^2$
$y = 2(x+2)^2 + 1$
$y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$
$y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
$y = -(x-2)^2 - 2$
$a : 4x^2 - 4x + 1 = 0$
$b : -x^2 + 4x - 6 = 0$
$c : x^2 + 2x - 3 = 0$
$d : 2x^2 + 8x + 9 = 0$
$e : -x^2 + 6x - 9 = 0$
$f : -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$
1 STL 2 Année scolaire 2008-2009
Chapitre n°7 Polynôme du seconde degré

Fait à


$y = (x+1)^2 - 4$
$y = -(x-3)^2$
$y = 2(x+2)^2 + 1$
$y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$
$y = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$
$y = -(x-2)^2 - 2$
$a : 4x^2 - 4x + 1 = 0$
$b : -x^2 + 4x - 6 = 0$
$c : x^2 + 2x - 3 = 0$
$d : 2x^2 + 8x + 9 = 0$
$e : -x^2 + 6x - 9 = 0$
$f : -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$
1 STL 2 Année scolaire 2008-2009
Chapitre n°7 Polynôme du seconde degré

Pour les exercices 36 à 41, résolvez de même les équations suivantes.

36 $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$.

Aide : L'équation a deux solutions.

37 $3x^4 + 7x^2 + 2 = 0$.

Aide : L'équation n'a pas de solutions.

38 $3x^4 - 12x^2 = 0$.

Aide : L'équation a trois solutions.

★ **39** $\frac{1}{2} - 4x^4 - x^2 = 0$.

★ **40** $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.

★ **41** $4x^4 - 3x^2 + 12 = 0$.

Deux méthodes de résolution

Pour les exercices 42 à 46, résolvez chaque équation de deux façons :
– en factorisant le premier membre ;
– en développant et en utilisant les formules de résolution.

42 $4x^2 - (x-2)^2 = 0$.

★ **43** $x(3-x) + 6 - 2x = 0$.

44 $(x+3) - (x-1)(x+3) = 0$.

★ **45** $50 - 2(2-3x)^2 = 0$.

★ **46** $x^2 - x - 3(x-1) = 0$.

Inconnue au dénominateur

Pour les exercices 47 à 52, résolvez l'équation proposée. Vous pouvez vous reporter, si besoin, au TD1, page 129.

47 $\frac{7x^2 - 3x - 34}{x-1} = 0$.

48 $\frac{-x^2 + 5x + 6}{2x+1} = 0$.

49 $5x + 9 - \frac{2}{x} = 0$.

Aide : Commencez par réduire au même dénominateur.

50 $-\frac{1}{x} + \frac{2}{x+3} = 2$.

Aide : Commencez par réduire au même dénominateur.

★ **51** $\frac{-x^2 + 5x - 6}{x+1} = 0$.

★ **52** $\frac{2}{x+3} + \frac{1}{x^2+3x} = \frac{1}{2}$.

Inéquations du second degré

Pour les exercices 53 à 62, résolvez l'inéquation.

53 $x^2 - x + 1 \geqslant 0$.

54 $4x^2 - x + 1 < 0$.

55 $-3x^2 + 15 < 0$.

56 $-5x^2 + 4x + 1 \geqslant 0$.

57 $3x^2 - 4x + \frac{4}{3} < 0$.

58 $30x^2 < 0{,}2 - x$.

59 $x^2 < x\sqrt{2} + \frac{1}{2}$.

60 $2x < x^2 - 1$.

★ **61** $(1-x)^2 < -x^2$.

★ **62** $(2-3x)^2 \leqslant (1-x)^2$.

Tableau de signes

63 Un exemple guidé

On pose $f(x) = (x^2 + x - 6)(x + 1)$.

1. Expliquez pourquoi le signe de $f(x)$ est indiqué dans le tableau ci-dessous.

x		-3		-1		2	
x^2+x-6	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

2. Déduisez de ce tableau l'ensemble des solutions de l'inéquation $(x^2 + x - 6)(x + 1) < 0$.

Pour les exercices 64 à 67, résolvez chacune des inéquations en faisant un tableau de signes.

64 $(-6x^2 - x + 2)(x + 2) \geqslant 0$.

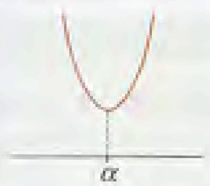
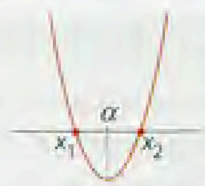
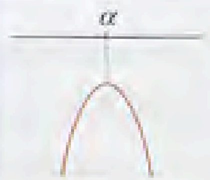
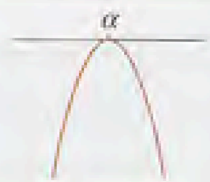
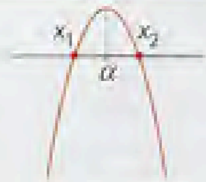
65 $(2 - x)(x^2 + 3x - 4) < 0$.

66 $(x + 10)(-3x^2 + 5x - 4) > 0$.

2 Équation $ax^2 + bx + c = 0$
Factorisation et signe du trinôme

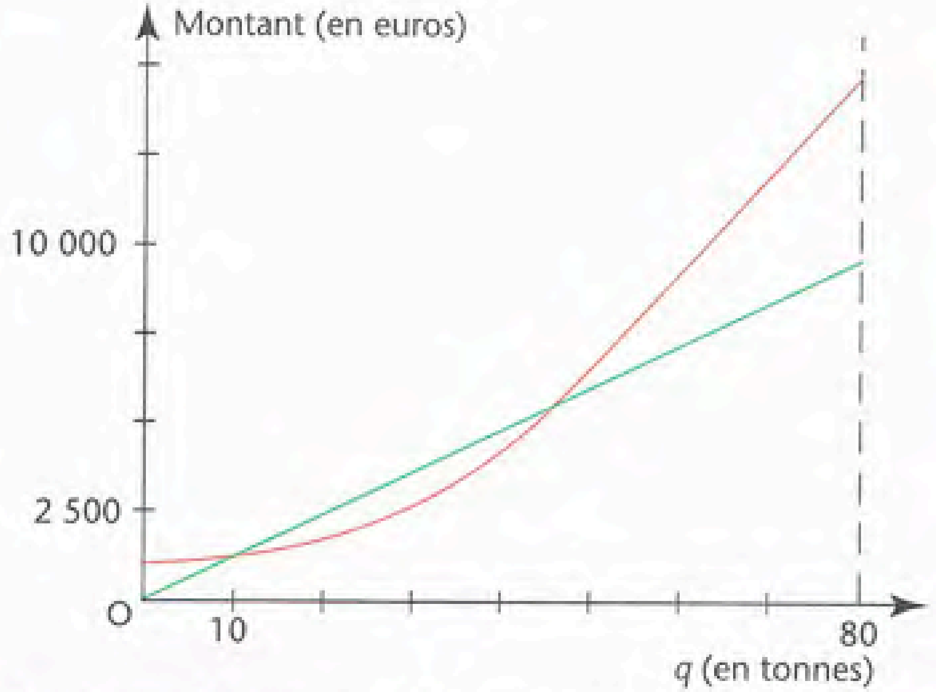
L'existence des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ dépend du signe du **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ du polynôme $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On admet les résultats ci-dessous :

discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$	pas de solution	une seule solution : $\alpha = \dfrac{-b}{2a}$ (solution double)	deux solutions distinctes : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisation de $P(x)$	pas de factorisation	$P(x) = a(x - \alpha)^2$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
$a > 0$ • position de la **parabole** par rapport à l'axe des abscisses • *signe* de $P(x)$	 x : $-\infty$ … $+\infty$ $P(x)$: $+$	 x : α $P(x)$: $+$ 0 $+$	 x : x_1 x_2 $P(x)$: $+$ 0 $-$ 0 $+$
$a < 0$	 x : $-\infty$ … $+\infty$ $P(x)$: $-$	 x : α $P(x)$: $-$ 0 $-$	 x : x_1 x_2 $P(x)$: $-$ 0 $+$ 0 $-$

- Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet des solutions, ces solutions sont les **racines** du trinôme $ax^2 + bx + c$.
  Ce sont les abscisses des points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses.
- Lorsque le polynôme a deux racines distinctes x_1 et x_2, l'abscisse α du sommet de la parabole est la moyenne des deux racines : $\alpha = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

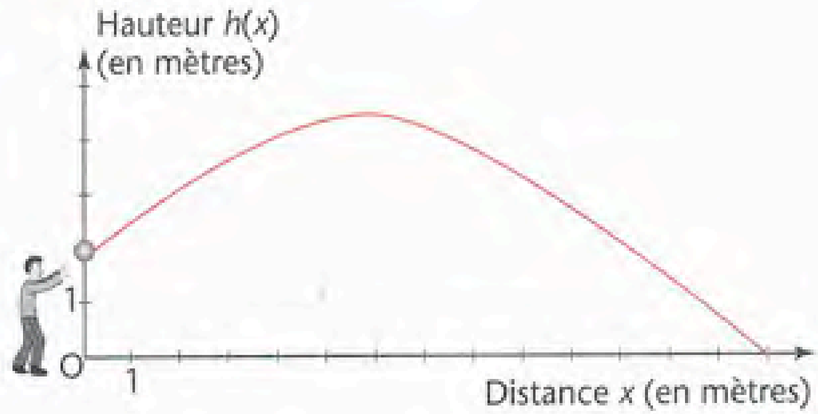
52 Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
Ce graphique donne la courbe représentant la fonction coût total C (en rouge) et la courbe représentant la fonction recette totale R (en vert).



a) Lire graphiquement les quantités de farine que doit produire l'entreprise pour que la production soit rentable.

b) On sait que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ et que $R(q) = 120q$.
Reprendre la question a) par le calcul.

10 Voici la trajectoire suivie par un poids lors d'un lancer.



1. Lire sur le graphique, approximativement :
a) la hauteur maximale du poids ;
b) la longueur du lancer.

2. La fonction h représentée ci-dessus est donnée par :

$$h(x) = -0{,}07x^2 + 0{,}84x + 2.$$

a) Écrire la forme canonique de $h(x)$.
b) En déduire la hauteur maximale du poids.
c) Utiliser la forme canonique pour calculer la longueur du lancer.

EXEMPLE DE RECHERCHE D'EXTREMUM

28 ■■■ *Le bénéfice maximal*

Le bénéfice B en francs réalisé par une société fabriquant du matériel pour les laboratoires pour un nombre q d'articles produits et vendus est donné par la relation :

$B(q) = -28\,000 + 350q - 0{,}7q^2$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[100, 400]$ par :

$f(x) = -0{,}7x^2 + 350x - 28\,000$.

Étudier les variations de f sur l'intervalle $[100, 400]$.

2. Déduire du **1.** le nombre d'articles pour lequel l'entreprise réalisera le bénéfice maximal. Quel sera, dans ce cas, ce bénéfice ?

RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE D'UNE ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ

Sans employer les formules de résolution, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes. (Exercices 68 à 72)

68 ■ $x^2 - 4x = 0$.

69 ■ $2x^2 + 3 = 0$.

70 ■ $-x^2 + 6x - 9 = 0$.

71 ■ $3x^2 - 5 = 0$.

72 ■ $(2x - 5)^2 - 9 = 0$.

En appliquant les formules de résolution, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations, d'inconnue x, q ou t, suivantes. Dans le cas de solutions s'écrivant à l'aide du symbole $\sqrt{\ }$, donner une valeur approchée des résultats 10^{-2} près. (Exercice 73 à 79)

73 ■ $6x^2 + 5x - 4 = 0$.

74 ■ $2x^2 + 3x - 5 = 0$.

75 ■ $4x^2 + 3x - 1 = 0$.

76 ■ $9q^2 - 6q + 1 = 0$.

77 ■ $4t^2 - 3t - 2 = 0$.

78 ■ $x^2 + x + 2 = 0$.

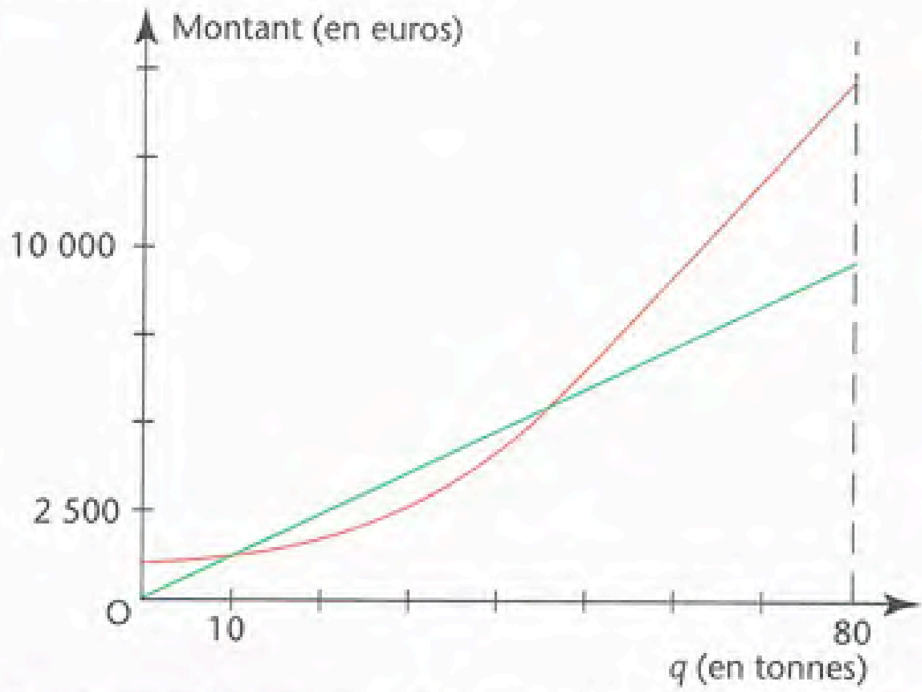
51 **1.** Résoudre chacune des inéquations :

a) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 \geqslant 0$ b) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1 < x + 2$.

2. À l'écran de la calculatrice, tracer la droite Δ d'équation $y = x + 2$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 1$.

Donner une interprétation graphique des résultats obtenus à la question **1.**

52 Une entreprise produit de la farine de blé.
On note q le nombre de tonnes de farine fabriquée avec $0 < q < 80$.
Ce graphique donne la courbe représentant la fonction coût total C (en rouge) et la courbe représentant la fonction recette totale R (en vert).



a) Lire graphiquement les quantités de farine que doit produire l'entreprise pour que la production soit rentable.

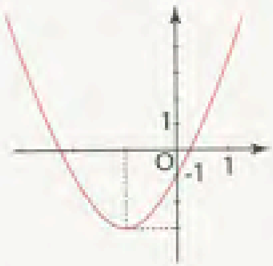
b) On sait que $C(q) = 2q^2 + 10q + 900$ et que $R(q) = 120q$.
Reprendre la question **a)** par le calcul.

Première STL 2 - Année Scolaire 2009-2010
Chapitre n°7 : Polynômes du second degré - Forme canonique et parabole page 166 - 187

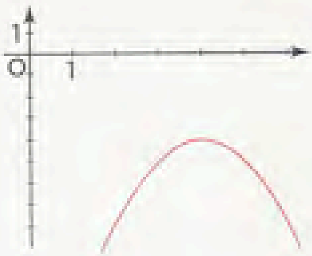
Vrai ou faux

Pour les exercices 62 à 69
Dire si l'affirmation est vraie ou fausse.
Justifier cette réponse.

62 La parabole ci-contre représente la fonction $x \mapsto 2x^2 + 4x + 1$.



63 La parabole qui représente la fonction $x \mapsto -x^2 + 8x - 20$, ne coupe jamais l'axe des ordonnées.



64 L'ensemble des solutions de l'équation $x^3 = 9x$ est $\{-3 ; 3\}$.

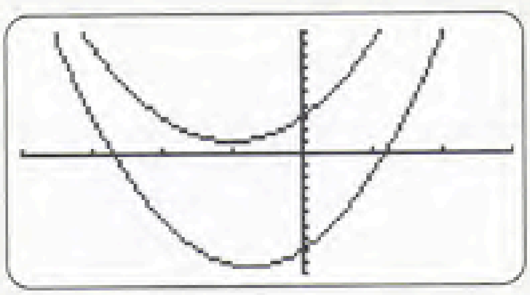
65 L'équation $7x + 20x^2 - 6 = 0$ a pour solutions $\dfrac{-10-\sqrt{142}}{7}$ et $\dfrac{-10+\sqrt{142}}{7}$.

66 L'expression $-5x^2 + 20x - 20$ se factorise sous la forme $-5(x-2)^2$.

67 L'inéquation $x^2 \geqslant 4$ a pour ensemble de solutions $[2 ; +\infty[$.

68 Pour tout réel x, $-x^2 - 10x - 24 < 0$

69 La parabole qui représente $x \mapsto 2x^2 + 4x + 3$ est au-dessus de la parabole qui représente $x \mapsto \frac{5}{2}x^2 + \frac{15}{4}x - 8$, sur $\mathbb{R}$.



89 Essai de modélisation des dépenses

Ce tableau donne les dépenses de fonctionnement d'une administration, de 1996 à 2004.
Ces dépenses sont exprimées en points PIB (produit intérieur brut).

année	1996	1997	1998	1999	2000
rang x_i	0	1	2	3	4
dépense y_i	0,7	1,52	1,99	2,21	2,30

année	2001	2002	2003	2004
rang x_i	5	6	7	8
dépense y_i	2,1	2,85	1,95	1,9

On recherche un polynôme du second degré f qui rend compte approximativement de cette évolution. On dira que « f est acceptable » si pour chaque valeur de x_i, la distance entre $f(x_i)$ et y_i est inférieure à 0,1.

1. Représenter dans un repère orthogonal (*unités graphiques* : 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées) les neuf points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$.
2. On note f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$, b, c réels) dont la courbe représentative $\mathcal{P}$ passe par les points de coordonnées (1 ; 1,5), (2 ; 2) et (4 ; 2,3).

a) Écrire un système de trois équations à trois inconnues qui traduit le fait que $\mathcal{P}$ passe par ces trois points.

b) Résoudre ce système et en déduire l'expression de $f(x)$.

c) Tracer la parabole $\mathcal{P}$ représentant f sur le graphique de la question 1.

d) La fonction f ainsi déterminée est-elle acceptable ?

QCM

Pour les exercices 54 à 61
Indiquer la bonne réponse par a, b ou c.

54 La forme canonique du trinôme $3x^2 - 9x + 13$ est...

a $3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$ **b** $3(x-3)^2 - 14$

c $3\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{43}{4}$

55 Dans un repère, la parabole représentant la fonction $x \mapsto -2x^2 + 5x - 7$ a pour sommet le point...

a $S\left(-\frac{5}{4}\ ;-\frac{131}{8}\right)$ **b** $S\left(\frac{5}{2}\ ;-7\right)$ **c** $S\left(\frac{5}{4}\ ;-\frac{31}{8}\right)$

56 L'équation $x^2 - 3x = 0$ admet...

a 3 pour seule solution **b** deux solutions : 0 et – 3

c deux solutions : 0 et 3

57 Le discriminant du trinôme $-4x^2 + 7x + 2$ est...

a – 81 **b** 17 **c** 81

58 L'équation $121x^2 - 44x + 5 = 0$ ...

a admet deux solutions distinctes

b n'admet aucune solution

c admet une solution double

59 L'équation $3x^2 + 242x = 5\,800$ ...

a admet deux solutions distinctes

b admet une seule solution

c n'admet aucune solution

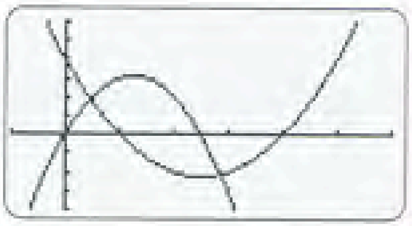
60 L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 - 6x + 5 \leqslant 0$ est...

a $]-\infty\ ;-5]$ **b** $]-\infty\ ;1] \cup [5\ ;+\infty[$ **c** $[1\ ;5]$

61 Dans un repère, $\mathcal{P}$ est la parabole représentant la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 7x + \frac{15}{2}$. $\mathcal{P}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur...

a $[-1\ ;+\infty[$ **b** $[-1\ ;15]$ **c** $[-1\ ;1]$

30 f et g sont les fonctions définies par :
$f(x) = x^2 - 5x + 4$
et $g(x) = -2x^2 + 5x$.
Voici les paraboles $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ représentant f et g à l'écran d'une calculatrice (*fenêtre graphique : $-1 \leqslant x \leqslant 6$ et $-4 \leqslant y \leqslant 6$*).



1. a) Lire sur le graphique des valeurs approchées des abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
b) Calculer les valeurs exactes de ces abscisses.

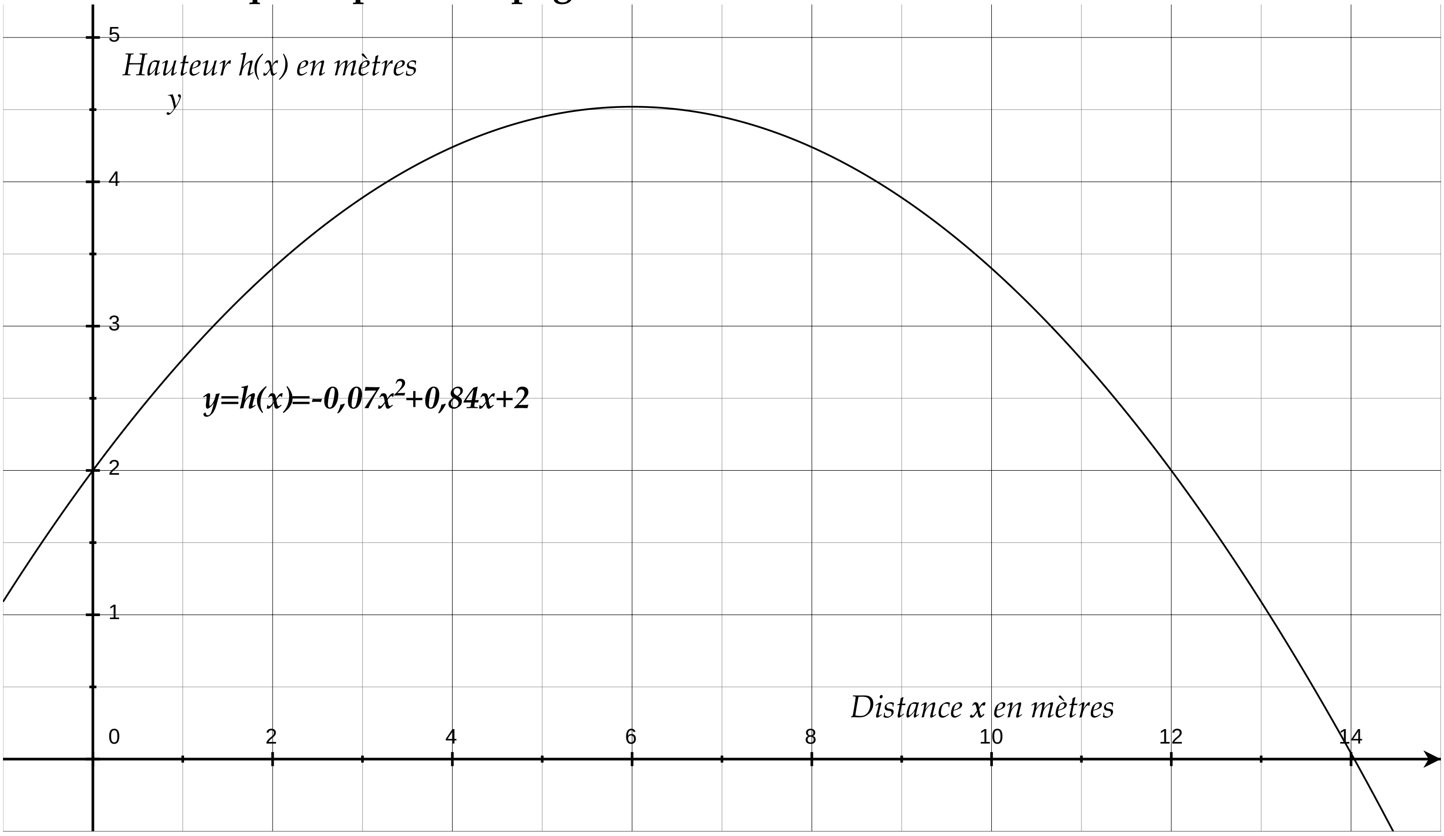
2. h est la fonction définie par $h(x) = \dfrac{3}{2}x^2 - 9x + 14$.

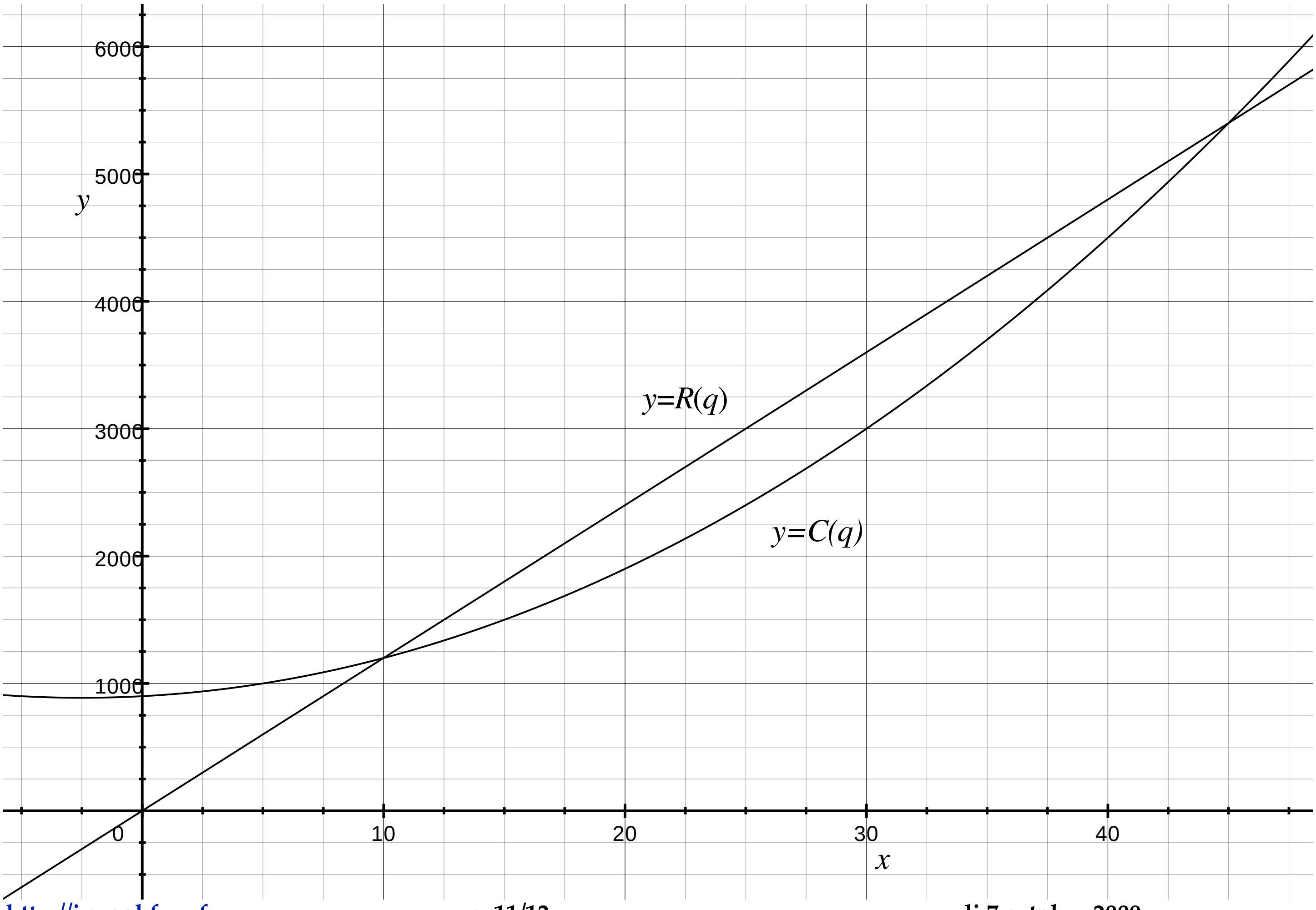
a) Représenter les fonctions f, g, h à l'écran de la calculatrice. Conjecturer le nombre de points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_g$, puis de $\mathscr{C}_h$ et $\mathscr{C}_f$.
b) Déterminer par le calcul les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

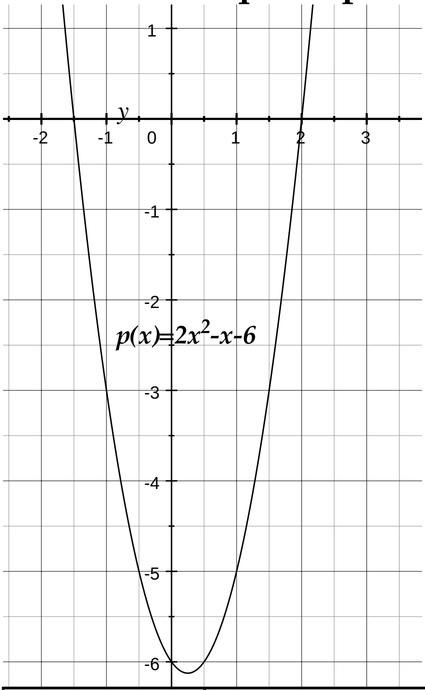
35 On se propose d'étudier le signe du trinôme $3x^2 - 10x - 25$ selon les valeurs du réel x.
a) Calculer le discriminant de ce trinôme.
b) Résoudre l'équation $3x^2 - 10x - 25 = 0$.
c) Recopier et compléter le tableau de signes :

x		…		…	
$3x^2 - 10x - 25$	…	0	…	0	…

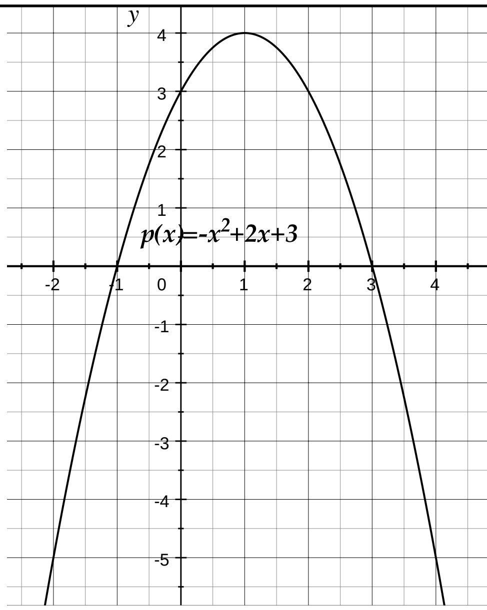
Vérifier la cohérence de vos réponses à l'aide de la représentation de la fonction $x \mapsto 3x^2 - 10x - 25$ à l'écran d'une calculatrice.


5
Hauteur h(x) en mètres
y
4
3
y=h(x)=-0,07x²+0,84x+2
2
1
Distance x en mètres
0
2
4
6
8
10
12
14


6000
5000
y
4000
3000
y=R(q)
2000
y=C(q)
1000
0
10
20
30
40
x

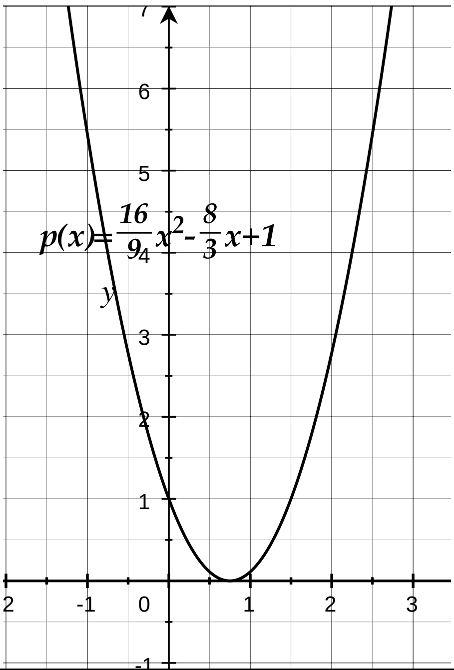


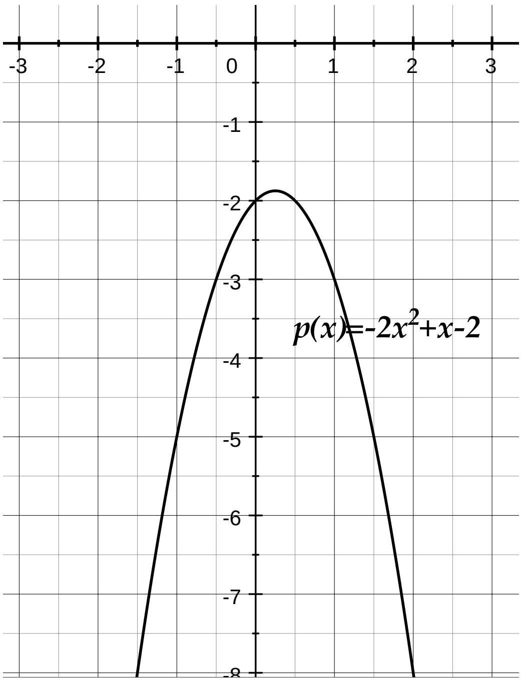
x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$p(x) =$	



x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$p(x) =$	

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$p(x) =$	





x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$p(x) =$	