Première 1ES1 - Année Scolaire 2009 - 2010
Chapitre n°3 : Probabilités ; Page 75 - 119

Avant-Propos:

Le problème du Grand Duc de Toscane, grand joueur de hasard, est historiquement à l'origine du terme " calcul de probabilités ". Galilée (1564-1642), mathématicien, physicien et astronome italien a mis en oeuvre une méthode permettant le dénombrement des cas possibles.

Contenu :

On appelle expérience aléatoire tout concours de circonstances (expérience, observation, mesure, …) qui conduit à des éventualités bien définies mais dont le résultat est imprévisible.

Ces éventualités sont appelées aussi issues de l'épreuve. La totalité des issues possibles étant bien définies, elles constituent l'univers noté Ω ; une partie de l'univers est appelé événement.

Bien retenir la définition d'évènements incompatibles , contraires.

Progression :

Leçon n°1 : Présentation , vocabulaire , évènements ; (à partir d'un document remis en classe)

Les exercices d'entraînement :

Estimation d'une proportion :

*U*ne urne contient plusieurs centaines de billes de couleur verte ou blanche dans une proportion p inconnue de billes vertes.

On chercher à estimer p à partir d'un échantillon de taille n (estimation des résultats d'un référendum) obtenu par tirages successifs dans une urne avec remise.

Expérience aléatoire :

On effectue n tirages avec remise et on note à chaque fois la couleur de la boule.

Il est donc possible de calculer la fréquence f de sortie de la couleur verte.

Théorème :

On admettra que la proportion p inconnue appartient à l'intervalle : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$

On parle d'intervalle de fluctuation : ''la proportion inconnue fluctue dans un intervalle centré en f , d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$

Exercice 1 : Contrôle de qualité.

Dans une usine automobile, on contrôle les défauts de peinture de type «grains ponctuels sur le capot»

Lorsque le processus est sous contrôle, on 20% de défauts.

Lors d'un contrôle de 50 véhicules, on observe 26% de défauts (13 sur 50) . Faut-il s'en inquiéter

SOLUTION :

On note p la proportion inconnue de véhicules admettant des défauts de peinture sur la chaîne de fabrication.

En supposant que la situation est sous contrôle c'est à dire que la fréquence de défauts est de 20% donc f=0,20 ;

D'après le théorème : l'intervalle de fluctuation de la proportion inconnue p est

$\left[0{,}2 - \frac{1}{\sqrt{50}} ; 0{,}2 + \frac{1}{\sqrt{50}} \right] = \left[0{,}2 - 0{,}14 ; 0{,}2 + 0{,}14 \right] = \left[0{,}06 ; 0{,}34 \right]$ *Une observation de 26% de défauts sur un échantillon de 50 ne peut pas être considérée comme «anormale»*

PROBABILITÉS - PRÉSENTATION - VOCABULAIRE

Ne pouvant raisonnablement enfermer le concept de hasard dans une définition formelle, les mathématiciens ont banni ce terme de leur vocabulaire.
Cela ne les empêche pas d'utiliser l'adjectif "aléatoire" dont la racine latine (sans doute plus noble) désigne, tout comme le mot arabe " az.zahr" , le jeu de dés.

Pourtant c'est précisément l'objet de la théorie des probabilités (appelée calcul de probabilités) que d'élaborer une théorie mathématique apte à décrire des phénomènes où l'on admet l'intervention du hasard.

Epreuve - Expérience aléatoire : *notée* E
✍ Ce terme décrira **tout concours de circonstances** (expérience, observation, mesure, ...) qui conduit à des éventualités **bien définies mais dont le résultat est imprévisible**.
✍ Ces éventualités sont appelées aussi **issues** de l'épreuve.
On pourra appeler expérience aléatoire la réalisation de une ou plusieurs épreuves.

Evènement - Evènement élémentaire :
Un **évènement** est un ensemble **bien définies d'éventualités (issues de l'épreuve)**. (du latin evenire : arriver).

☞L'ensemble de toutes les issues d'une épreuve
est appelé **univers (noté Ω) associé à l'épreuve** E .
☞Une issue sera appelée **évènement élémentaire** .

Un évènement A est donc constitué d'évènements élémentaires.
☞**Le nombre de ces évènements élémentaires est noté : n(A)**
L'univers Ω associé à l'épreuve E est constitué de tous les évènements élémentaires.
☞**Le nombre de tous les évènements élémentaires est noté : n(Ω)**

Probabilité :
✍ **La probabilité d'un évènement mesure le degré de certitude qu'on a de le voir se réaliser.**
Assez naturellement, on attribue la probabilité 0 à un évènement impossible et la probabilité 1 à un évènement dont la réalisation est certaine.
L'échelle des valeurs possible étant fixée, comment peut-on évaluer la probabilité d'un évènement donné ? Cette question admet plusieurs types de réponses suivant la nature de l'expérience aléatoire considérée.
Principe d'homogénéité et de symétrie :
S'il paraît plausible d'admettre que toutes les issues d'une épreuve E sont également vraisemblables, on admettra que la probabilité de l'évènement A est : .

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Cette première approche s'avère très vite peu satisfaisante et on doit faire appel à une définition de nature statistique et admettre le principe des fréquences.

Principe des fréquences :
Considérons une épreuve E et un évènement A ; on réalise N fois l'épreuve ; l'évènement A ayant lieu n_A fois, On dira que la fréquence relative de l'évènement A est :
D'où p(A) défini par :

$$p(A) = \frac{n_A}{N}$$

Afin d'illustrer ce vocabulaire des probabilités nous allons considérer l'expérience aléatoire sur

E **: « tirer une boule dans un sac contenant 12 boules numérotées de 1 à 12 »**

Une issue de l'expérience :

Ω : univers associé à l'expérience aléatoire E

Ω = { }

<u>Evènements :</u>

Un **évènement** est ensemble bien défini d'issues de l'expérience aléatoire E .

Exemple : A est l'évènement Obtenir un nombre pair

A : « Obtenir un nombre pair » ***présentation de l'évènement en extension***

A = { x ; x est un nombre pair } ***présentation de l'évènement en extension***

A = { ; ; ; ; ; } ***présentation de l'évènement en compréhension***

<u>Evènement élémentaire :</u>

C'est un évènement n'ayant qu'un seul résultat : l'ensemble n'a alors qu'un seul élément.

Exemple : S « Obtenir un 7»

S = { 7 } ;

<u>Réunion d'évènements $A \cup B$:</u>

C'est un évènement formé par l'ensemble des résultats des deux évènements : dans le 1er **ou** dans le 2ème évènement (on ne répète jamais les éléments qui sont en communs).

Exemple :

A : « Obtenir un nombre pair » ; A = { ; ; ; ; ; } ;

B : « Obtenir un nombre multiple de 3 » ; B = { ; ; ; }

$\mathbf{A \cup B}$: « Obtenir un nombre pair ou un multiple de 3 »

$\mathbf{A \cup B}$ = { ; ; ; ; ; ; ; }

<u>Intersection d'évènements $A \cap B$:</u>

C'est un évènement formé par l'ensemble des résultats communs aux deux évènements : dans le 1er **et** dans le 2ème évènement.

$\mathbf{A \cap B}$: « Obtenir un nombre pair et un multiple de 3 »

$\mathbf{A \cap B}$ = { ; } ;

<u>Evènements disjoints ou incompatibles :</u>

Ce sont deux évènements qui n'ont **pas de résultats en commun** : leur intersection est vide.

Exemple : C : « Obtenir un nombre supérieur strictement à 10 »

C = { ; } ;

D : « Obtenir un nombre inférieur strictement à 6 »

D = { ; ; ; ; } ;

$\mathbf{C \cap D}$ = ;

<u>Evènements contraires :</u>

Ce sont deux évènements disjoints mais dont la réunion forme la **totalité** des résultats possibles. Les résultats favorables de l'un sont les résultats défavorables de l'autre.

Exemple : A : « Obtenir un nombre pair »

A = { ; ; ; ; ; } ;

F : « Obtenir un nombre impair »

F = { ; ; ; ; ; } ;

$\mathbf{A \cap F}$ = ;

$\mathbf{A \cup F}$ = ;

Problème du Grand Duc de Toscane

Expérience aléatoire :

Lancé de trois dés :

Variable aléatoire

Somme des chiffres sur la face supérieure des dés

Somme	Cas favorables	Nombre de cas favorables		Probabilité
3	111;	1		1/216
4	112;	3		1/72
5	113;122;	6	3+3	1/36
6	114;123;222;	10	3+6+1	5/108
7	115;124;133;223;	15	3+6+3+3	5/72
8	116;125;134;224;233;	21	3+6+6+3+3	7/72
9	126;135;144;225;234;333;	25	6+6+3+3+6+1	25/216
10	136;145;226;235;244;334;	27	6+6+3+6+3+3	1/8
11		27		1/8
12		25		25/216
13		21		7/72
14		15		5/72
15		10		5/108
16		6		1/36
17	566;	3		1/72
18	666;	1		1/216
		216		

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)					
3	(3;1)					
4	(4;1)					
5	(5;1)					
6	(6;1)					

I LOI DE PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE FINI :

Exemple 1 :

ÉNONCÉ : On tire au hasard une boule dans une urne contenant 10 boules rouges et 20 boules noires. Définir une loi de probabilité sur l'ensemble des tirages possibles.

Exemple 2 :

ÉNONCÉ : Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire au hasard une première boule que l'on remet dans l'urne, puis une seconde boule. On forme un nombre à deux chiffres qui a pour chiffre des dizaines le résultat du premier tirage et pour chiffre des unités le résultat du second tirage.

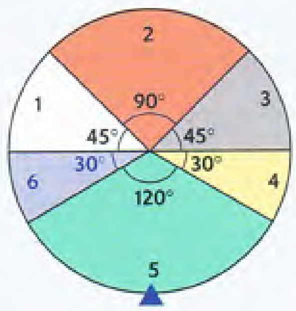
a) Déterminer l'ensemble E de toutes les issues possibles de cette expérience aléatoire.

b) Définir une loi de probabilité sur E.

II PROBABILITÉ D'UN ÉVÈNEMENT :

Exemple 3 :

ÉNONCÉ : Une roue est partagée en six secteurs comme indiqué sur le dessin ci-contre. Une expérience aléatoire consiste à faire tourner la roue et à noter le numéro du secteur sur lequel elle s'immobilise. La roue étant bien équilibrée, on associe à chaque issue une probabilité proportionnelle à l'angle du secteur angulaire correspondant.



a) Préciser l'ensemble E des issues de cette expérience aléatoire.

b) Déterminer une loi de probabilité sur E pour modéliser l'expérience.

c) Calculer la probabilité des événements :
A : « le numéro est pair », B : « le numéro est inférieur ou égal à 3 » et C : « le numéro est un multiple de 3 ».

Exemple 4 :

ÉNONCÉ : On tire au hasard une carte dans un jeu classique de 32 cartes. On s'intéresse à la couleur et à la valeur de la carte.
Calculer la probabilité des événements :

a) A : « La carte tirée est un roi »

b) B : « La carte tirée est un trèfle »

c) C : « La carte tirée est une figure »

Exemple 5 :

ÉNONCÉ : Dans un club, plusieurs activités sont proposées dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 pratiquent les deux sports.
Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

a) pratique le tir à l'arc ? le golf ?

b) pratique l'un au moins des deux sports ?

c) ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

22 ★ Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Certaines montres peuvent présenter un défaut x ou un défaut y.

Des études statistiques menées sur 10 000 montres ont donné les renseignements suivants :

- 10 % des montres présentent le défaut x,
- parmi les montres présentant le défaut x, 12 % présentent le défaut y,
- parmi les montres ne présentant pas le défaut x, 5 % présentent le défaut y.

1° Reproduire, en le complétant, le tableau suivant des effectifs.

nombre de montres	présentant le défaut x	ne présentant pas le défaut x	total
présentant le défaut y			
ne présentant pas le défaut y			
total			10 000

2° On choisit au hasard une de ces 10 000 montres, chacune de ces montres ayant la même probabilité d'être choisie.

a) Déterminer la probabilité de l'événement A : « La montre choisie présente le défaut x ».

b) Déterminer la probabilité de l'événement B : « La montre choisie présente le défaut y ».

c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$, intersection des événements A et B.

Déterminer la probabilité de l'événement $A \cap B$.

d) Déterminer la probabilité d'obtenir une montre sans défaut.

e) Déterminer la probabilité de l'événement $A \cup B$.

26 Au début d'une séance de cinéma, on distribue au hasard un billet de loterie à chacun des 120 spectateurs. Parmi les 120 billets distribués, 3 donnent droit à 4 places gratuites, 6 donnent droit à 3 places gratuites, 18 donnent droit à 2 places gratuites, 42 donnent droit à 1 place gratuite et les autres billets ne gagnent rien.

1° Quelle est la probabilité pour un spectateur de gagner exactement 2 places gratuites ?

2° Quelle est la probabilité pour un spectateur de ne rien gagner ?

3° On s'intéresse au nombre de places gratuites gagnées avec un billet.

a) Quels sont les résultats possibles ?

b) Déterminer la loi de probabilité de ces résultats.

c) Quelle est la probabilité pour un spectateur de gagner au moins 2 places gratuites ?

25 ★ Une enquête portant sur les loisirs préférés (cinéma, lecture, sport) des 105 élèves de Première ES d'un lycée a permis de dresser le tableau suivant.

	cinéma	lecture	sport	total
filles				48
garçons	26	15		
total				105

1° Compléter le tableau sachant qu'il y a :

a) deux fois plus de filles que de garçons préférant la lecture ;

b) deux fois moins de filles que de garçons préférant le sport.

2° On rencontre au hasard un élève de Première ES.

Quelle est la probabilité :

a) qu'il préfère le cinéma ?

b) que ce soit un garçon qui préfère le sport ?

c) que ce soit une fille qui préfère la lecture ou le sport ?

3° L'élève rencontré est une fille.

Quelle est la probabilité qu'elle préfère la lecture ?

37 Une machine remplit des paquets de café dont le poids prévu est 250 g.

En réalité, ce poids (arrondi à 10 g) est susceptible de varier de 220 à 280 g suivant la loi de probabilité ci-dessous :

x_i	220	230	240	250	260	270	280
p_i	0,07	0,11	0,19	0,26	0,18	0,13	0,06

On prélève au hasard un paquet à la sortie de la remplisseuse.

1° Calculer les probabilités des événements suivants :

A : « le paquet pèse 250 g au plus » ;

B : « le paquet pèse plus de 250 g » ;

C : « le paquet pèse moins de 250 g » ;

D : « le paquet pèse au moins 250 g ».

Citer les couples d'événements contraires.

2° Le coût du paquet à la sortie de la remplisseuse est évalué à 0,01 € le gramme.

Les paquets dont le poids est inférieur à 250 g sont complétés et leur coût est alors majoré d'une somme de 1 €.

On s'intéresse au coût d'un paquet après mise en conformité des paquets de poids inférieur à 250 g. Établir la loi de probabilité de ce coût et calculer le coût moyen.

Première 1ES1 - Année Scolaire 2009 - 2010
Chapitre n°3 : Probabilités ; Page 75 - 119

Exercice :

Une boîte contient 7 jetons :
☞ cinq jetons sont de forme carrée, 2 sont rouges , 3 sont verts ;
☞ deux jetons sont de forme triangulaire, l'un est rouge , l'autre est vert ;

Expérience aléatoire :

Tirer au hasard , successivement et sans remise, deux jetons dans la boîte.

Issue :

① Présenter une issue de l'expérience.

Univers :

② Calculer n(Ω) le nombre de cas possibles.

Evènements :

On considère les 3 évènements suivants :
A_1 : «les 2 jetons obtenus sont rouges » ;
A_2 : «les 2 jetons obtenus sont verts » ;
A : «les 2 jetons obtenus sont de même couleur » ;

③ Calculer la probabilité de chacun des évènements.

On considère l'évènement suivant :
B : «les 2 jetons obtenus sont de même forme » ;

④ Calculer la probabilité de l'évènement B.

On considère les évènements $A \cup B$ et $A \cap B$:

④ Ecrire les évènements en compréhension.
⑤ Calculer la probabilité de $A \cup B$ et $A \cap B$.

Première 1ES1 - Année Scolaire 2009 - 2010
Chapitre n°3 : Probabilités ; Page 75 - 119

Exercice :

Une boîte contient 7 jetons :
☞ cinq jetons sont de forme carrée, 2 sont rouges , 3 sont verts ;
☞ deux jetons sont de forme triangulaire, l'un est rouge , l'autre est vert ;

Expérience aléatoire :

Tirer au hasard , successivement et sans remise, deux jetons dans la boîte.

Issue :

① Présenter une issue de l'expérience.

Univers :

② Calculer n(Ω) le nombre de cas possibles.

Evènements :

On considère les 3 évènements suivants :
A_1 : «les 2 jetons obtenus sont rouges » ;
A_2 : «les 2 jetons obtenus sont verts » ;
A : «les 2 jetons obtenus sont de même couleur » ;

③ Calculer la probabilité de chacun des évènements.

On considère l'évènement suivant :
B : «les 2 jetons obtenus sont de même forme » ;

④ Calculer la probabilité de l'évènement B.

On considère les évènements $A \cup B$ et $A \cap B$:

④ Ecrire les évènements en compréhension.
⑤ Calculer la probabilité de $A \cup B$ et $A \cap B$.