Première ES 1 - Année Scolaire 2009-2010
Chapitre n°1 : Suites - page 116 - 143
Devoir en classe n°5 - le Jeudi 21 Janvier 2010

Les réponses seront toutes justifiées par un raisonnement accompagné de calculs.

EXERCICE N°1 : (9 pts)

Germaine est une retraitée de 60 ans. Le montant de sa retraite s'élève à 750 € (net) par mois en 2008. Ce montant augmente chaque année de 2%. Germaine a trouvé un petit appartement dont le loyer lui revient à 250 € par mois en 2008. Ce loyer augmente de 15 € par an.

❶ – On note u_0 le loyer mensuel en 2008 et u_n celui de l'année 2008+n.

On a ainsi $u_0 = 250$.

(1 pt) **a.** Calculer $u_1 = 250+15=265$; $u_2 = 265+15=280$.

(1 pt) **b.** Donner la nature de la suite (u_n). *Puisque* $u_2 - u_1 = 15$ *et* $u_1 - u_0 = 15$ *; la suite* (u_n) *est une suite arithmétique de raison r=15 et de premier terme* $u_0 = 250$€.

(0,5 pt) **c.** Exprimer u_n en fonction de n. *Donc* $u_n = u_0 + r\ n$, $u_n = 250 + 15\ n$.

(0,5 pt) **d.** Calculer $u_{10} = 250 + 15\ 10 = 400$€.

❷ – On note v_0 le montant mensuel de la retraite en 2008 et v_n celui de l'année 2008+n.

On a ainsi $v_0 = 750$.

(1 pt) **a.** Calculer v_1 , v_2. $v_1 = 750 * 1{,}02=765$; $v_2 = 765 * 1{,}02=780{,}30$.

(1 pt) **b.** Donner la nature de la suite (v_n). *Puisque* $v_2/v_1 = 1{,}02$ *et* $v_1/v_0 = 1{,}02$ *; la suite* (v_n) *est une suite géométrique de raison q=1,02 et de premier terme* $v_0 = 750$€.

(0,5 pt) **c.** Exprimer v_n en fonction de n. *Donc* $v_n = v_0 *q^n$, $v_n = 750 *1{,}02^n$.

(0,5 pt) **d.** Calculer $v_{10} = 750 *1{,}02^{10} \approx 914{,}25$€.

(2,5 pts) ❸ – Quel pourcentage du montant de la retraite de Germaine, le loyer représentera-t-il en 2028 ? (donner ce pourcentage avec deux décimales). *Retraite en 2028 :* $u_{20} = 250 + 15\ 20 = 550$€ *; salaire en 2028 :* $v_{20} = 750 *1{,}02^{20} \approx 1114{,}46$€. *550/1114,46 ≈ 0,4935 ce qui correspond à un pourcentage de 49,35 %*

(2,5 pts) ❹ – Germaine estime qu'elle aura des difficultés à payer son loyer s'il représente 50 % de sa retraite. À partir de quel âge Germaine aura-t-elle des difficultés à payer son loyer ? *Retraite en 2030 :* $u_{22} = 250 + 15\ 22 = 580$€ *; salaire en 2030 :* $v_{22} = 750 *1{,}02^{22} \approx 1159{,}48$€. *580/1159,48 ≈ 0,5002 ce qui correspond à un pourcentage de 50,02 %. Donc à partir de 2030.*

EXERCICE N°2 : (5 pts)

La légende de l'échiquier

À la grande surprise des courtisans qui le prirent pour un sot, l'ambassadeur persan lui demanda modestement que l'on veuille bien lui accorder un grain de blé sur la 1ère case de l'échiquier, deux grains sur la 2ième case, quatre sur la 3ième case et ainsi de suite en doublant le nombre de grains à chaque fois jusqu'à la 64ième case qui est la dernière du jeu. Le pharaon accepta volontiers, étonné même par cette récompense « modeste ». Il ordonna donc au Grand Trésorier de réunir cette quantité de blé. »

Nous allons tenter, à l'aide des mathématiques, de savoir si le persan a été trop modeste ou si le pharaon aurait dû faire un peu plus de mathématiques !

100 grains de blé ont une masse de 10g et un volume de 5 cm3 la production mondiale de blé est estimée à 640 millions de tonnes.

(4 pts) ❶ – Calculer la quantité de grains de blé nécessaire pour remplir l'échiquier ;

Considérons la suite géométrique (u_n) *de premier terme* $u_0 =1$ *(1 grain est posé sur la 1ère case), de 2ème terme* $u_1 =2$ *(2 grains sont posés sur la 2ème case), de 3ème terme* $u_2 =4 = 2^2$ *(2*2 grains sont posés sur la 2ème case) et ainsi de suite de 64ème terme* $u_{63} = 2^{63}$ *(* 2^{63} *grains sont posés sur la 64 ème case). La quantité de grains est la somme des 64 termes :*

$$1+2^1+2^2+...+2^{63}=1\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1\approx 1{,}8\ 10^{19} \text{ ; masse en gr} \approx 1{,}8\ 10^{18} \text{ ; masse en T} \approx 1{,}8\ 10^{12} \text{ ;Nombre d'années} \approx 1{,}8\ 10^{12}/640\ 10^{6} \approx 2883$$

(1 pt) ❷ – Sachant qu'en moyenne 100 grains de blé pèse 10 g, calculer approximativement la masse de blé que devrait recevoir l'ambassadeur persan. On donnera la réponse en grammes, en kilos puis en tonnes. Comparer cette quantité à la production mondiale de blé.

EXERCICE N°3 : (5 pts)

Une entreprise veut cesser la production d'un produit fin Décembre 2010 ? Cette production a diminué chaque année de la même quantité depuis janvier 2003 . Durant ces années 4680 unités ont été produites au total.

De combien d'unités cette production a-t-elle diminué chaque année ?

Méthode :

On note u_0 la production inconnue de l'année 2003 et u_n celui de l'année 2003+n.

(1 pt) **a.** Calculer n tel que $u_n =0$.

Solution : u_0 *la production inconnue de l'année 2003 et* u_7 *celui de l'année 2010 ; donc c'est en 2011 que la production sera nulle* $u_8 =0$.

(1 pt) **b.** Donner la nature de la suite (u_n). Justifier.

Solution : On note r la diminution constante d'une année sur l'autre. Puisque $u_2 - u_1 = r$ *et* $u_1 - u_0 = r$ *; la suite* (u_n) *est une suite arithmétique de raison r inconnue et de premier terme* u_0 *inconnu.*

(0,5 pt) **c.** Exprimer u_n en fonction de n. Solution : $u_n = u_0 + r\ n$ *pour* $0 \leq n \leq 8$.

(2,5 pts) **d.** Calculer u_0 puis r la raison de la suite. En déduire la diminution de production chaque année.

$$u_0+u_1+u_2+...+u_8 = 4680 = (8+1)\frac{(u_0+u_8)}{2} = 9\frac{u_0}{2} \text{ ; } u_0 = 1040 \text{ ; } u_8 = 0 = u_0+8\ r \text{ ; } 0 = 1040+8\ r \text{ ; } r = -130$$

Première ES 1 - Année Scolaire 2009-2010
Chapitre n°1 : Suites - page 116 - 143
Devoir en classe n°5 - le Jeudi 21 Janvier 2010

Les réponses seront toutes justifiées par un raisonnement accompagné de calculs.

EXERCICE N°1 : (9 pts)

Germaine est une retraitée de 60 ans. Le montant de sa retraite s'élève à 860 € (net) par mois en 2008. Ce montant augmente chaque année de 2,5%. Germaine a trouvé un petit appartement dont le loyer lui revient à 350 € par mois en 2008. Ce loyer augmente de 15 € par an.

❶ – On note u_0 le loyer mensuel en 2008 et u_n celui de l'année 2008+n.

On a ainsi $u_0 = 350$.

(1 pt) **a.** Calculer *$u_1 = 350+18=368$; $u_2 = 368+18=386$.*

(1 pt) **b.** Donner la nature de la suite (u_n). *Puisque $u_2 - u_1 = 18$ et $u_1 - u_0 = 18$; la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r=18 et de premier terme $u_0 = 350$€.*

(0,5 pt) **c.** Exprimer u_n en fonction de n. *Donc $u_n = u_0 + r\ n$, $u_n = 350 + 18\ n$.*

(0,5 pt) **d.** Calculer *$u_{10} = 350 + 18\ 10 = 530$€.*

❷ – On note v_0 le montant mensuel de la retraite en 2008 et v_n celui de l'année 2008+n.

On a ainsi $v_0 = 860$.

(1 pt) **a.** Calculer v_1 , v_2. *$v_1 = 860 * 1{,}025=881{,}5$; $v_2 = 881{,}5 * 1{,}025 \approx 903{,}54$.*

(1 pt) **b.** Donner la nature de la suite (v_n). *Puisque $v_2/v_1 = 1{,}02$ et $v_1/v_0 = 1{,}02$; la suite (v_n) est une suite géométrique de raison q=1,02 et de premier terme $v_0 = 860$€.*

(0,5 pt) **c.** Exprimer v_n en fonction de n. *Donc $v_n = v_0 *q^n$, $v_n = 860 *1{,}025^n$.*

(0,5 pt) **d.** Calculer *$v_{10} = 860 *1{,}025^{10} \approx 1100{,}87$€.*

(2,5 pts) ❸ – Quel pourcentage du montant de la retraite de Germaine, le loyer représentera-t-il en 2028 ? (donner ce pourcentage avec deux décimales). *Retraite en 2028 : $u_{20} = 360 + 18\ 20 = 710$€ ; salaire en 2028 : $v_{20} = 860 *1{,}025^{20} = 1409{,}21$€. 710/1409,21 ≈ 0,5038 ce qui correspond à un pourcentage de 50,38 %*

(2,5 pts) ❹ – Germaine estime qu'elle aura des difficultés à payer son loyer s'il représente 50 % de sa retraite. À partir de quel âge Germaine aura-t-elle des difficultés à payer son loyer ? *Retraite en 2025 : $u_{17} = 360 + 18\ 22 = 656$€ ; salaire en 2025 : $v_{17} = 860 *1{,}025^{17} = 1308{,}59$€. 656/1308,59 ≈ 0,5013 ce qui correspond à un pourcentage de 50,13 %. Donc à partir de 2025.*

EXERCICE N°2 : (5 pts)

La légende de l'échiquier

À la grande surprise des courtisans qui le prirent pour un sot, l'ambassadeur persan lui demanda modestement que l'on veuille bien lui accorder un grain de blé sur la 1ère case de l'échiquier, deux grains sur la 2ième case, quatre sur la 3ième case et ainsi de suite en doublant le nombre de grains à chaque fois jusqu'à la 64ième case qui est la dernière du jeu. Le pharaon accepta volontiers, étonné même par cette récompense « modeste ». Il ordonna donc au Grand Trésorier de réunir cette quantité de blé. »

Nous allons tenter, à l'aide des mathématiques, de savoir si le persan a été trop modeste ou si le pharaon aurait dû faire un peu plus de mathématiques !

100 grains de blé ont une masse de 10g et un volume de 5 cm3 la production mondiale de blé est estimée à 640 millions de tonnes.

(4 pts) ❶ – Calculer la quantité de grains de blé nécessaire pour remplir l'échiquier ;

*Considérons la suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 =1 (1 grain est posé sur la 1ère case), de 2ème terme u_1 =2 (2 grains sont posés sur la 2ème case), de 3ème terme $u_2 =4 = 2^2$ (2*2 grains sont posés sur la 2ème case) et ainsi de suite de 64ème terme $u_{63} = 2^{63}$ (2^{63} grains sont posés sur la 64 ème case). La quantité de grains est la somme des 64 termes : 18 446 744 073 709 551 615*

$$1+2^1+2^2+...+2^{63}=1\frac{1-2^{64}}{1-2}=2^{64}-1\approx 1{,}8\ 10^{19}\text{ ; masse en gr }\approx 1{,}8\ 10^{18}\text{ ; masse en T }\approx 1{,}8\ 10^{12}\text{ ;Nombre d'années }\approx 1{,}8\ 10^{12}/640\ 10^6\approx 2883$$

(1 pt) ❷ – Sachant qu'en moyenne 100 grains de blé pèse 10 g, calculer approximativement la masse de blé que devrait recevoir l'ambassadeur persan. On donnera la réponse en grammes, en kilos puis en tonnes. Comparer cette quantité à la production mondiale de blé.

EXERCICE N°3 : (5 pts)

Une entreprise veut cesser la production d'un produit fin Décembre 2010 ? Cette production a diminué chaque année de la même quantité depuis janvier 2003 . Durant ces années 4680 unités ont été produites au total.

De combien d'unités cette production a-t-elle diminué chaque année ?

Méthode :

On note u_0 la production inconnue de l'année 2003 et u_n celui de l'année 2003+n.

(1 pt) **a.** Calculer n tel que *u_n =0.*

Solution : u_0 la production inconnue de l'année 2003 et u_7 celui de l'année 2010 ; donc c'est en 2011 que la production sera nulle u_8 =0 .

(1 pt) **b.** Donner la nature de la suite (u_n). Justifier.

Solution : On note r la diminution constante d'une année sur l'autre. Puisque $u_2 - u_1 = r$ et $u_1 - u_0 = r$; la suite (u_n) est une suite arithmétique de raison r inconnue et de premier terme u_0 inconnu.

(0,5 pt) **c.** Exprimer u_n en fonction de n. Solution : *$u_n = u_0 + r\ n$ pour $0 \leq n \leq 8$.*

(2,5 pts) **d.** Calculer u_0 puis r la raison de la suite. En déduire la diminution de production chaque année.

$$u_0+u_1+u_2+...+u_8 = 4680 = (8+1)\frac{(u_0+u_8)}{2} = 9\frac{u_0}{2}\text{ ; }u_0 = 1040\text{ ; }u_8 = 0 = u_0+8\ r\text{ ; }0 = 1040+8\ r\text{ ; }r = -130$$

Première ES 1 - Année Scolaire 2009-2010
Chapitre n°1 : Suites - page 116 - 143
Devoir en classe n°5 - le Jeudi 21 Janvier 2010

	Devoir n°5	$u_n=u_0+15\ n$	$vn=v_0\ 1{,}02^n$		Exercice n°1
	Rang de l'année n	Loyer : u_n	Retraite : v_n	Proportion du loyer par rapport à la retraite (en%)	
15	0	250	750,00	33,33%	2008
1,02	1	265	765,00	34,64%	2009
	2	280	780,30	35,88%	2010
	3	295	795,91	37,06%	2011
	4	310	811,82	38,19%	2012
	5	325	828,06	39,25%	2013
	6	340	844,62	40,25%	2014
	7	355	861,51	41,21%	2015
	8	370	878,74	42,11%	2016
	9	385	896,32	42,95%	2017
	10	400	914,25	43,75%	2018
	11	415	932,53	44,50%	2019
	12	430	951,18	45,21%	2020
	13	445	970,20	45,87%	2021
	14	460	989,61	46,48%	2022
	15	475	1009,40	47,06%	2023
	16	490	1029,59	47,59%	2024
	17	505	1050,18	48,09%	2025
	18	520	1071,18	48,54%	2026
	19	535	1092,61	48,97%	2027
	20	550	1114,46	49,35%	2028
	21	565	1136,75	49,70%	2029
	22	580	1159,48	50,02%	2030
	23	595	1182,67	50,31%	2031
	24	610	1206,33	50,57%	2032

	Devoir n°5	$u_n=u_0+18\ n$	$vn=v_0\ 1{,}03^n$		Exercice n°1
	Rang de l'année n	Loyer : u_n	Retraite : v_n	Proportion du loyer par rapport à la retraite (en%)	
18	0	350	860,00	40,70%	2008
1,03	1	368	881,50	41,75%	2009
	2	386	903,54	42,72%	2010
	3	404	926,13	43,62%	2011
	4	422	949,28	44,45%	2012
	5	440	973,01	45,22%	2013
	6	458	997,34	45,92%	2014
	7	476	1022,27	46,56%	2015
	8	494	1047,83	47,15%	2016
	9	512	1074,02	47,67%	2017
	10	530	1100,87	48,14%	2018
	11	548	1128,39	48,56%	2019
	12	566	1156,60	48,94%	2020
	13	584	1185,52	49,26%	2021
	14	602	1215,16	49,54%	2022
	15	620	1245,54	49,78%	2023
	16	638	1276,67	49,97%	2024
	17	656	1308,59	50,13%	2025
	18	674	1341,31	50,25%	2026
	19	692	1374,84	50,33%	2027
	20	710	1409,21	50,38%	2028
	21	728	1444,44	50,40%	2029
	22	746	1480,55	50,39%	2030
	23	764	1517,57	50,34%	2031
	24	782	1555,50	50,27%	2032