Travaux Dirigés 15

Td n°15 ; 2 nde
Année scolaire 2002/2003

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE
Le Lundi 9 Septembre 2002

LA PYRAMIDE DE KHÉOPS

Le saviez-vous ?

D'après l'historien grec Hérodote (vers 484-420 avant J-C), la pyramide de Khéops (2600 ans avant J-C), de base carrée, dont les surfaces latérales sont des triangles isocèles, possède la propriété suivante :
« Les surfaces latérales triangulaires ont une aire égale à celle du carré construit sur la hauteur de la pyramide »

Partie A :

On note 2a le côté AB, h la hauteur SH de la pyramide,
x la hauteur du triangle isocèle ASB.

❶ – Exprimez h en fonction de a et de x ;

❷ – Exprimez, en fonction de a et de x l'aire de la face SAB et celle du carré de côté SH ;

❸ – Déduisez, en utilisant la remarque d'Hérodote, la relation liant a et x ;

❹ – On note φ le quotient de la longueur ES par EH ;

Montrer que φ vérifie : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$:

En écrivant : $\varphi^2 - \varphi - 1 = \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$, calculer la valeur de φ sachant que la valeur de p est positive;

Le nombre φ que nous venons d'obtenir est le nombre d'or ;

❺ – A l'origine, selon les spécialistes, les dimensions de la pyramide de Khéops étaient : côtés du carré, 440 coudées royales ; hauteur de la pyramide, 280 coudées royales ;

La coudée royale utilisée en Egypte ancienne est voisine de 0,52 m ;

L'assertion d'Hérodote est-elle justifiée ?

LE NOMBRE D'OR

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

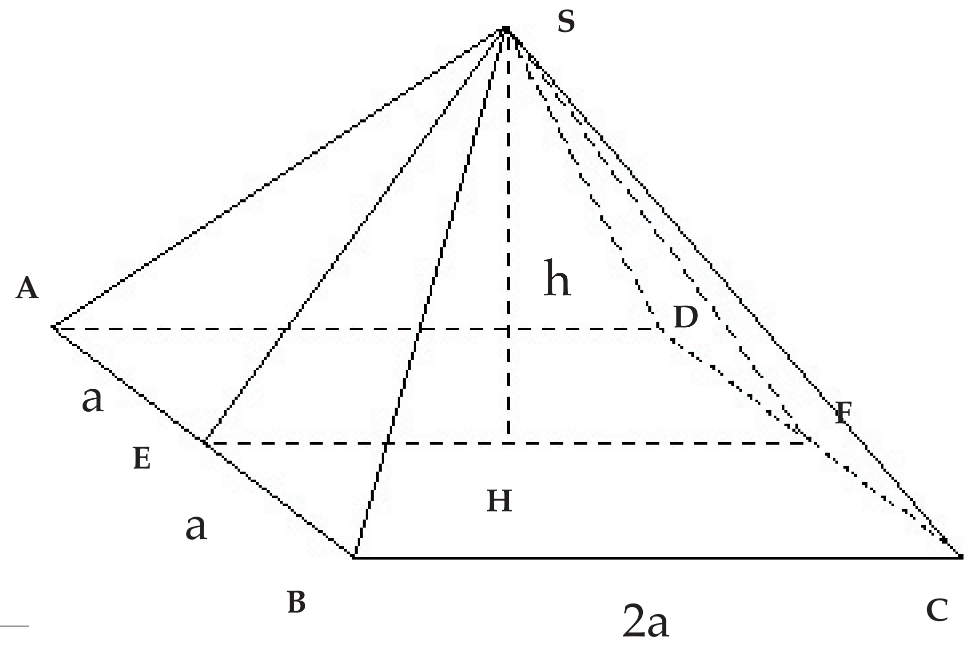
Partie B :

Ce nombre, déjà connu dans l'Antiquité, noté φ, possède de nombreuses propriétés.

❶ – Compléter la suite des nombres 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... ; en remarquant que chacun d'eux est la somme des deux nombres qui précédent dans la suite ;

❷ – Calculer les quotients des nombres conscécutifs de la suite précédente ;Montrer que

❸ – Comparer le dixième quotient obtenu avec le nombre φ ; :



Nombre d'Or

NOUS AVONS :
" PARTAGÉ LE SEGMENT **AB** EN MOYENNE ET EXTRÊME RAISON * "
ET NOUS AVONS FABRIQUÉ UNE SUITE DE MESURES : **a , b , u , c , d**

* Ce tracé est décrit par Euclide au 3ème Siècle avant J-C .

Considérons le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 1 , BC = $^1/_2$;

❶ – Calculer AC ; AC = $^{\sqrt{5}}/_2$;

Associons à ce triangle trois cercles ;

Soit L l'intersection de la droite (AC) et du cercle de centre C et de rayon BC = 0,5 ;

❷ – Calculer AL ; AL= b = $^{(\sqrt{5}-1)}/_2$;

Soit M et P l'intersection de la droite (AB) et du cercle de centre A et de rayon AL ;

❸ – Calculer BM ; BM = a = $^{(3-\sqrt{5})}/_2$;

❹ – Calculer PB ; PB = c = $^{(\sqrt{5}+1)}/_2$;

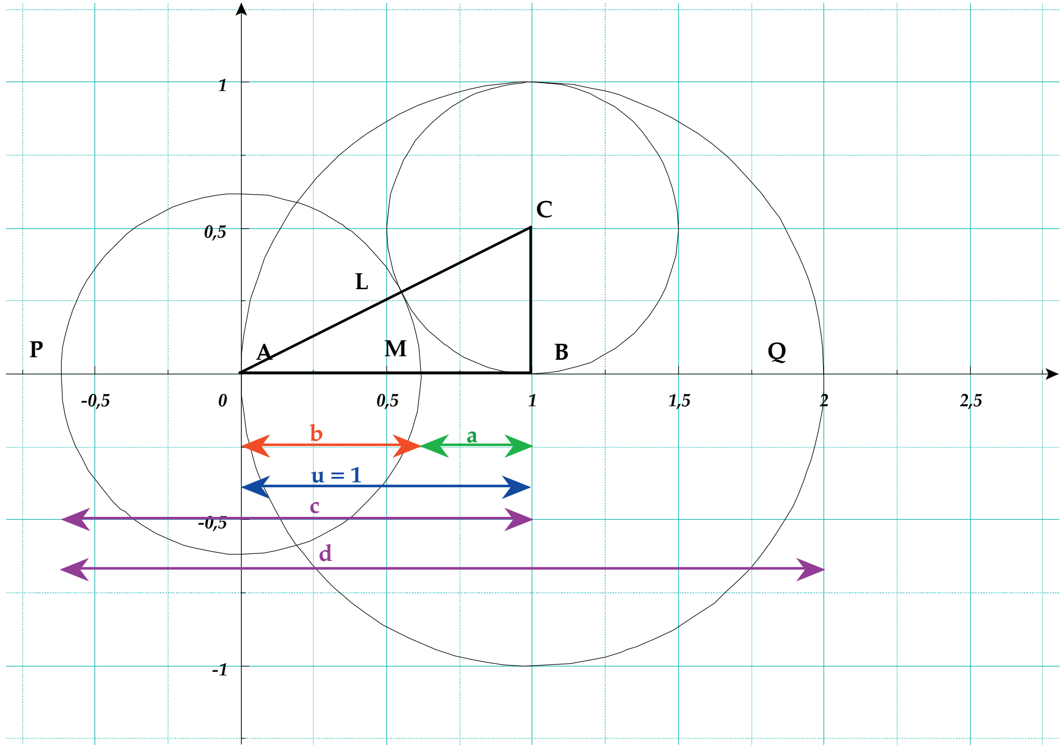
Soit A et Q l'intersection de la droite (AB) et du cercle de centre B et de rayon AB ;

❺ – Calculer PQ ; PQ = d= $^{(3+\sqrt{5})}/_2$;

LA SUITE DE MESURES : **a , b , u , c , d** EST UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE DE RAISON NOTÉE : **φ (PHI)**

Nous appelons φ (comme Phidias) ce nombre appelé, depuis la Renaissance, section dorée, nombre d'or, divine proportion :

❻ – Calculer les rapports de longueur : $^{AM}/_{BM} = {}^b/_a$;
puis : $^{AB}/_{AM} = {}^u/_b$; puis : $^{PB}/_{AB} = {}^c/_u$; puis : $^{PQ}/_{PB} = {}^d/_c$;



La progression a , b , u , c , d est une suite géométrique de raison φ ;

En effet par le calcul : $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AB}{AM} = \dfrac{PB}{AB} = \dfrac{PQ}{PB} = \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)}{2}$;

$\dfrac{b}{a} = \dfrac{u}{b} = \dfrac{c}{u} = \dfrac{d}{c} = \varphi$;

Sachant que u = 1 donc : $c = u\varphi = \varphi$; $d = c\varphi = \varphi^2$; $b = \dfrac{1}{\varphi}$; $c = \dfrac{1}{\varphi^2}$;

Ainsi la suite (a , b , u , c , d) s'écrit encore : $\left(\dfrac{1}{\varphi^2}, \dfrac{1}{\varphi}, 1, \varphi, \varphi^2\right)$

CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHÉE DE √5 PAR L'ALGORITHME DE BABYLONE :

Il s'agit du plus ancien algorithme connu à ce jour.

Mathématiqement il n'a pas été encore de méthode plus rapide pour trouver une approximation de la racine carrée d'un réel quelconque.

Il s'agit de ce que l'on applle d'une méthode dite d'ordre 2 puisque la suite répétée des calculs permet à chaque exécution d'obtenir 2 décimales exactes.

INTERPÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU CALCUL ÉLÉMENTAIRE :

Considérons le carré OABC d'aire 5 unités d'aire (ici 5 cm^2);

❶ – Calculer le côté OA = OC ; OA=OC = √5 ;

Associons à ce carré 2 rectangles OA'B'C' et OA"B"C" d'aire 5

✹ ayant pour largeur OA'(longueur OC") = 2 ;

✹ ayant pour longueur OC'(longueur OA") = 5/2 ;

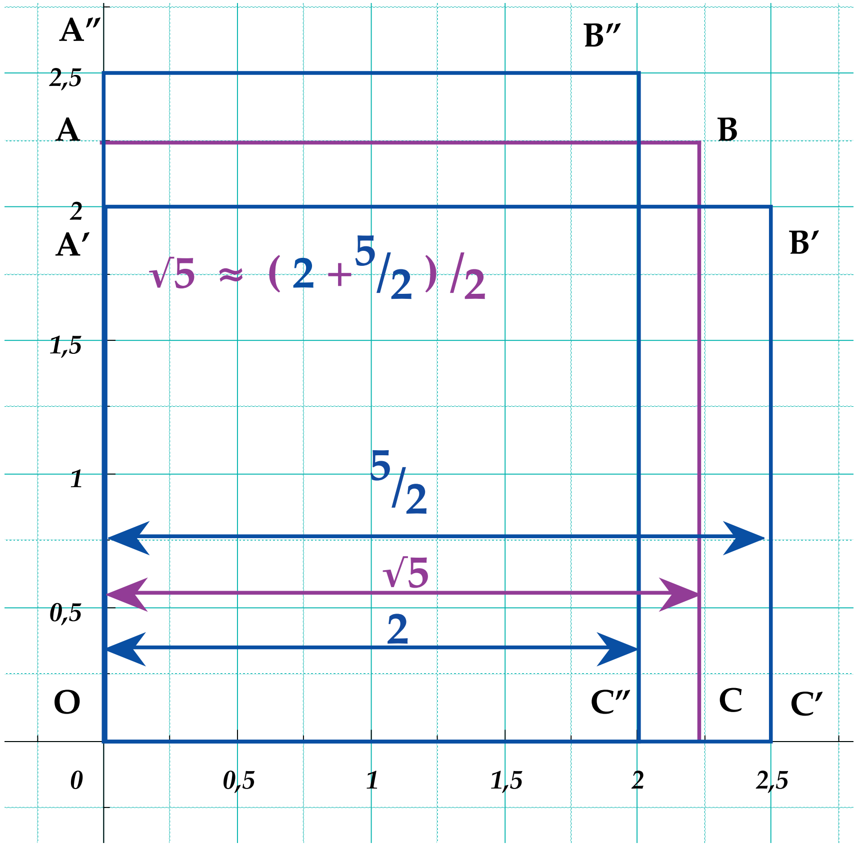
L'idée de base est de partir d'une valeur approchée de √5 :

✹ *Si l'on choisi 2 comme valeur approchée, alors 5/2 (5 divisé par 2 : aire 5 divisée par la largeur 2) est aussi une valeur approchée de √5 ;*

✹ *Et du reste 2 ≤ √5 ≤ 5/2 ;*

L'idée principale est de calculer une nouvelle valeur approchée de √5 en prenant la moyenne arithmétique de 2 et 5/2 ;

❷ – Calculer cette moyenne aritmétique = $^1/_2$ (2+5/2) = $^1/_2$ (4/2+5/2) = 9/4



MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME :

La première valeur approchée choisie est notée u_0 ;
elle permet de caluler une nouvelle valeur notée u_1
La formule de calcul est :

$$u_1 = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{5}{u_0}\right) ;$$

Et ainsi de suite :
Pour passer de la n ième valeur approchée
và la n+1 ième la formule de calcul est :

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right) ;$$

❸ – Calculer u_1 ; u_2 ; u_3 ;

L'idée principale est de vérifier qu' à chaque étape la valeur approchée de la fraction obtenue présente 2 décimales supplémentaires exactes.

❸ – Comparer les valeurs approchées de u_1 ; u_2 ; u_3 et d'une valeur de √5 obtenue avec votre calculatrice et vérifier que cette méthode constitue bien une méthode d'ordre 2.

Sachant que √5 ≈ 2,236067 977
Réponse : u_0 = 2 ; u_1 = 9/4= 2,25 ;
u_2 = 161/72= 2,236 111 111 ;
u_3 = 51 841 /23 184 = **2,236 067 97**8 ;
au bout de 3 calculs : ce sont 8 décimales significatives.

Nombre d'Or

Td n°xx ; XXX
Année scolaire 2002/2003

PRÉSENTATION DE LA DIVINE PROPORTION
Le Lundi 14 Avril 2003

CALCUL D'UNE VALEUR APPROCHÉE DE φ (PHI) PAR LA MÉTHODE DITE " DES TANGENTES " : $\varphi \approx 1{,}618\ 033\ 989$

Tracer la courbe représentative de la fonction ayant pour expression : $f(x) = x^2 - x - 1$;

❶ – Calculer les racines de l'équation : $f(x) = x^2 - x - 1 = 0$;

Réponse : l'une des 2 racines est φ (phi), il s'agit de celle qui est positive ;

❷ – Calculer la dérivée de f ;

Réponse : $f(x) = 2x - 1$;

<u>INTERPÉTATION GÉOMÉTRIQUE DU CALCUL ÉLÉMENTAIRE :</u>

Il s'agit de calculer une valeur approchée de phi :

L'idée de base est de calculer l'abscisse du point d'intersection B_0 de la tangente (T_0) à la courbe au point A_0 (2 ; 1) :

❸ – Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point A_0 d'abscisse 2 :

Réponse : $g(x) = 3x - 5$;

❹ – Calculer l'abscisse de B_0 :

Réponse : résoudre $g(x) = 3x - 5 = 0$; B_0 (5/3 ; 0) :

L'idée de base est de considérer que l'abscisse de B_0 est une valeur approchée de phi :

❹ – Calculer une valeur approchée de phi :

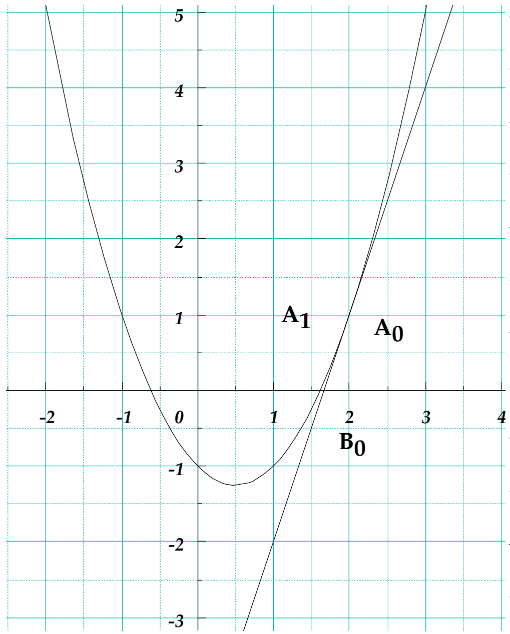
Réponse : $5/3 \approx 1{,}666\ 666$:

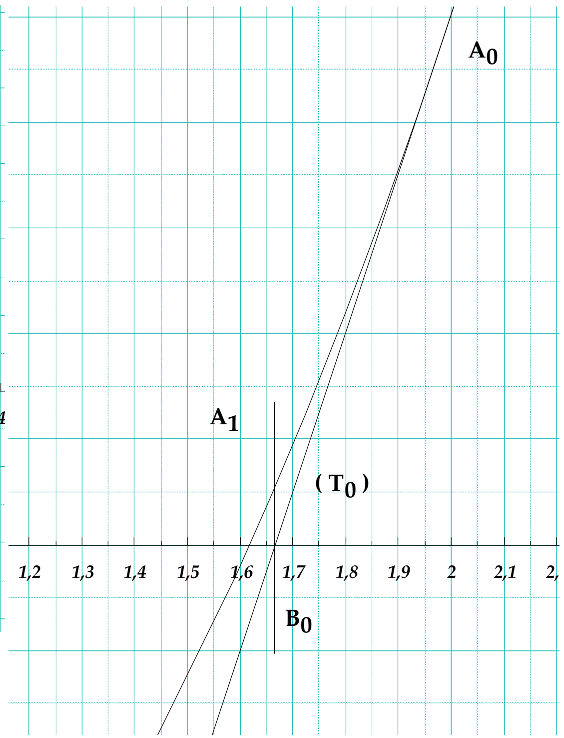
<u>MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME :</u>

L'idée de base est de calculer l'abscisse du point d'intersection B_1 de la tangente (T_1) à la courbe au point A_1 (5/3 ; f(5/3)) :

❺ – Calculer l'équation de la tangente à la courbe au point A_1 d'abscisse 5/3 :

Réponse : $g(x) = 7/3x - 34/9$





❻ – Calculer l'abscisse de B_1 :

Réponse : résoudre $g(x) = 7/3x - 34/9 = 0$; B_0 (102/63 ; 0) :

L'idée de base est de considérer que l'abscisse de B_1 est une valeur approchée de phi :

❼ – Calculer une valeur approchée de phi :

Réponse : $102/63 \approx 1{,}619\ 047$:

L'algorithme permet ainsi de calculer des valeurs approchées de phi de plus en plus précises ;

❻ – Calculer l'abscisse de B_2 et une nouvelle valeur approchée de phi :