

Exercice 1 : (12 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On se propose d'étudier l'évolution en fonction du temps des températures d'un bain et d'un solide plongé dans ce bain. Ces températures (à l'instant t) sont respectivement notées $a(t)$ et $b(t)$. Le temps t est exprimé en secondes et le températures en $^{\circ}\text{C}$.

Partie A : + 5,5 pt

Les températures $a(t)$ et $b(t)$ vérifient les conditions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) : a'(t) = -0,011 (a(t) - b(t)) \\ (2) : b'(t) = 0,021 (a(t) - b(t)) \end{array} \right\} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} a(0) = 40 \\ b(0) = 10 \end{array} \right\}$$

On pose $f(t) = a(t) - b(t)$;

- + 1 pt $\partial - \mathbf{a}$) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle : $y' + 0,032 y = 0$;
- + 1 pt $\partial - \mathbf{b}$) Résoudre l'équation précédente ;
- + 1 pt $\partial - \mathbf{c}$) Calculer $f(0)$ et montrer que $f(t) = 30 e^{-0,032t}$;

Soit F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$;.

- + 1 pt $- \mathbf{a}$) Exprimer $F(t)$ en fonction de t ;
- + 0,5 pt $- \mathbf{b}$) A l'aide de la condition (2) , justifier que $b(t) = K + 0,021F(t)$ où K est une constante ;
- + 1 pt $- \mathbf{c}$) Déterminer K et donner une expression de $b(t)$ en fonction de t ;

Partie B : + 6,5 pt

Pour tout t dans $[0 ; +\infty[$ on pose :

$$\left\{ \begin{array}{l} a(t) = \frac{5}{16} \left(95 + 33e^{-\frac{4t}{125}} \right) \\ b(t) = \frac{5}{16} \left(95 - 63e^{-\frac{4t}{125}} \right) \end{array} \right.$$

- + 1,5 pt ∂ Déterminer la limite de a ainsi que celle de b en $+\infty$; que peut-on en déduire pour les courbes représentatives de ces fonctions ;
- + 2 pts Calculer la dérivée et donner les variations de chacune des fonctions a et b ;
- + 1,5 pt Construire les courbes représentatives des fonctions a et b dans un repère orthogonal (sur papier millimétré ; unités graphiques : 1 cm pour 5 secondes en abscisse et 2 cm pour 5°C en ordonnée ; on fera varier t entre 0 et 120 secondes) ;
- + 1,5 pt A partir de quel instant la différence de température entre le solide et le bain est-elle inférieure à 1°C ?

EXERCICE II : (8 POINTS)

Un médium prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal.

On appelle p la probabilité que le médium donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage.

Si le médium est un imposteur on a $p = 1/2$; sinon $p > 1/2$.

On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.

Partie A : + 5 pt

On suppose $p = 1/2$ et on note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n , associe le nombre de succès du médium. (on arrondira les probabilités au dix millième le plus proche).

∂ Dans cette question on prend $n = 20$;

+ 1 pt ∂ – a) Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres ;

+ 1,5 pt ∂ – b) Calculer la probabilité $P(Y = 15)$;

Dans cette question on prend $n = 100$. On admet que la variable Y peut-être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi normale ;

+ 1,25 pt – a) Préciser les paramètres de cette loi normale ;

+ 1,25 pt – b) Utiliser cette approximation pour calculer $P(Y > 60)$;

Partie B : + 3 pt

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence des succès obtenus par le médium au cours des n tirages d'une carte.

On admet que F suit la loi normale de moyenne inconnue p et d'écart-type $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

On construit un test unilatéral permettant de détecter pour un échantillon de taille $n = 100$, au risque 5%, si le médium est un imposteur.

On choisit comme hypothèse nulle $H_0 : p = 1/2$; et comme hypothèse alternative $H_1 : p > 1/2$

+ 1,5 pt ∂ Calculer, sous l'hypothèse H_0 , le réel positif h tel que $P(F \leq 1/2 + h) = 0,95$;

+ 1 pt Enoncer la règle de décision du test ;

+ 0,5 pt Sur un échantillon de taille $n = 100$, le médium a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque 5%, que le médium est un imposteur ?

EXERCICE II : (8 POINTS)

Un médium prétend qu'il peut souvent deviner à distance la couleur d'une carte tirée au hasard d'un jeu de cartes bien battu et comportant des cartes de deux couleurs différentes en nombre égal. On appelle p la probabilité que le médium donne une réponse juste (succès) lors d'un tirage. Si le médium est un imposteur on a $p = 1/2$; sinon $p > 1/2$.

On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.

Partie A :

On suppose $p = 1/2$ et on note Y la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n , associe le nombre de succès du médium. (on arrondira les probabilités au dix millième le plus proche).

On appellera échantillon de taille n toute réalisation de n tirages successifs d'une carte dans le jeu, avec remise.

∂ Dans cette question on prend $n = 20$;

∂ - a) Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres ;

+ . 1 pt **Solution :**

+ L'expérience aléatoire qui consiste, après chaque tirage, à considérer la réponse du médium, conduit à deux issues contradictoires :

f S : réponse juste ou succès avec la probabilité $p = 0,5$;

f S(barre) : réponse fautive avec la probabilité $q = 1 - p = 0,5$;

On peut considérer que les réponses données par le médium sont indépendantes les unes des autres sachant que la composition des cartes n'est pas modifiée d'un tirage sur l'autre puisque les tirages ayant lieu avec remise ne perturbent pas le rapport initial de cartes rouges et noires.

+ Ainsi Y la variable aléatoire qui, aux 20 tirages de cartes, associe le nombre de réponses positives (succès) suit la loi binomiale $B(n, p)$ c'est à dire $B(20, 0,5)$

De plus $E(Y) = np = 20 \cdot 0,5 = 10$ et $V(X) = np(1-p) = 20 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 5$.

∂ - b) Calculer la probabilité $P(Y = 15)$;

+ 1,5 pt (0,5 f ; 0,5 f ; - 0,25 f) **Solution :**

+ $P(Y=15) = {}^{20}C_{15} \cdot 0,5^{15} \cdot 0,5^5 = {}^{20}C_{15} \cdot 0,5^{20} \cdot f = 0,014785 \approx 0,0148$. f f

Dans cette question on prend $n = 100$. On admet que la variable Y peut-être approchée par une variable aléatoire Z suivant une loi normale ;

- a) Préciser les paramètres de cette loi normale ;+ 1,25 pt

+ Ainsi Y la variable aléatoire qui, aux 100 tirages de cartes, associe le nombre de réponses positives (succès) suit la loi binomiale $B(n, p)$ c'est à dire $B(100, 0,5)$.

De plus $E(Y) = np = 100 \cdot 0,5 = 50$ et $V(X) = np(1-p) = 100 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 25$.

Conditions d'approximation d'une loi binomiale par une loi normale : $n > 30$ et $npq \geq 10$

Puisque $n = 100$ et $V(X) = npq = 25$ donc les conditions d'approximation de Y par une loi normale Z définie par $N(50 ; 5)$, avec $E(Y) = E(Z) = 50$ et $S(Y) = S(Z) = 5$.

- b) Utiliser cette approximation pour calculer $P(Y > 60)$;+ 1,25 pt

Soit T la variable aléatoire définie par $T = \frac{Z - 50}{5}$

Z suit la loi normale $N(50, 5)$ équivalent à T suit la loi normale $N(0,1)$

Calcul de $p(Y > 60)$: $Z > 60$ équivalent à $\frac{Z - 50}{5} > \frac{60 - 50}{5}$

$Z \geq 60$ équivalent à $\frac{Z - 50}{5} > 2$ équivalent à $T > 2$

Ainsi : $p(Y > 60) = p(T > 2) = 1 - p(T \leq 2) = 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0,9772 = 0,0228$

Partie B :

On appelle F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de taille n , associe la fréquence des succès obtenus par le médium au cours des n tirages d'une carte.

On construit un test unilatéral permettant de détecter pour un échantillon de de taille $n = 100$, au risque 5%, si le médium est un imposteur.

On choisit comme hypothèse nulle $H_0 : p = 1/2$; et comme hypothèse alternative $H_1 : p > 1/2$

Solution :

Considérons la population P constituée par les tirages d'une carte dans un jeu contenant autant de cartes rouges que de cartes noires.

K la variable aléatoire qui à un tirage de carte associe la réponse du médium ; la probabilité de répondre avec succès est notée p_0 conventionnellement. On estime que si $p_0 > 0,5$ le médium n'est pas un imposteur.

∂ Calculer, sous l'hypothèse H_0 , le réel positif h tel que $P(F \leq 1/2 + h) = 0,95$;

CONSTRUCTION DU TEST UNILATÉRAL :

∂ LOI D'ÉCHANTILLONNAGE :

La variable aléatoire F qui, à tout échantillon de taille $n = 100$, associe la fréquence des succès obtenus par le médium au cours des $n = 100$ tirages d'une carte,

suit la loi normale $N\left(p ; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$ où p admet pour estimateur $\hat{p}$

HYPOTHESE À TESTER : (hypothèse nulle) la valeur standard $p_0 = 0,5$

(H_0) hypothèse nulle : « $p = p_0$ » et éventuellement « $p < p_0$ » ; de part les hypothèses du problème
« le médium est un imposteur »

HYPOTHESE ALTERNATIVE - NATURE DU TEST :

(H_1) : « $p > p_0$ » c'est à dire « le médium n'est pas un imposteur » et le test est unilatéral.

CONDITIONS DE REJET (H_0) AU RISQUE 5% :

Remarque : il s'agit de vérifier que la probabilité p de succès à savoir ici 64% appartient ou non à un intervalle d'acceptation du type] - ∞ , 0,5 + h [, dont l'amplitude dépend du seuil de confiance. Pour réaliser ce calcul nous disposons d'un outil : c'est la loi normale qui, en fonction de ses caractéristiques p et $S(F)$ permettra de calculer cette amplitude.

f Sous l'hypothèse (H_0) : $p = p_0$

donc F suit la loi normale N (0,02 , $S(F)$) ;

$s(F) = 0,05$;

$$s(F) = \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} = \sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}} = 0,05$$

Enoncer la règle de décision du test ;

Remarque : à partir de là deux méthodes sont préconisées :

Première méthode : la condition de rejet sera formulée sur la fonction F , sur un intervalle de valeurs prises par F ;

Seconde méthode : la condition de rejet sera formulée en utilisant la variable $T = Y / s(Y)$

T variable suivant la loi normale centrée réduite .

* Première méthode

+ **1,5 pt** + On recherche un intervalle du type] - $\bullet$; 0,5 + h [tel que l'on ait 95% de chances d'avoir p appartenant à cet intervalle , c'est à dire $p(F < 0,5 + h) = 0,95$;

F suit la loi normale N $\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$ équivalent à $T = \frac{F - p_0}{s(y)}$ suit la loi normale N (0,1)

Ainsi : $p(F \leq 0,5 + h) = 0,95$ équivalent à $p(T \leq t_a) = 0,95$ [' (t_a) = 0,95]

Par lecture dans la table $t_a = 1,645$

Ainsi : $T \leq 1,645$ équivalent à $\frac{F - 0,5}{0,05} \leq 1,645$ équivalent à : $F - 0,5 \leq 1,645 \cdot 0,05$

ou encore : $F \leq 0,5 + 1,645 \cdot 0,05$; $F \leq 0,5 + 0,083$

Ainsi l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse (H_0) est :] - $\bullet$; 0,5 + h] et $h \approx 0,09$

+ **1 pt** f En conclusion :

Si p appartient] - $\bullet$; 0,59 [: on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si p n'appartient pas à] - $\bullet$; 0,59 [: on refuse (H_0) au risque 5 % ;

* Seconde méthode : + 1,5 pt

F suit la loi normale N $\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}} \right)$ équivalent à $T = \frac{F - p_0}{s(y)}$ suit la loi normale N (0,1)

Ainsi : $p(F \leq 0,5 + h) = 0,95$ équivalent à $p(T \leq t_a) = 0,95$ [' (t_a) = 0,95]

Par lecture dans la table $t_a = 1,645$

+ **1 pt** f En conclusion :

Si $T \leq 1,645$: on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si $T \geq 1,645$: on refuse (H_0) au risque 5 % ;

Sur un échantillon de taille $n = 100$, le médium a obtenu 64 succès. Peut-on considérer, au risque 5%, que le médium est un imposteur ? ;

+ **1 pt** ∞ MISE EN OEUVRE DU TEST :

* Première méthode :

f Calcul de] - $\bullet$; 0,5 + 1,645 0,05 [=] - $\bullet$; 0,59 [en hypothèse $p = 0,64$

f puisque $p > 0,59$; on refuse (H_0) au risque 5 %

* Seconde méthode :

f calcul de $t = \frac{p - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0,64 - 0,5}{\sqrt{\frac{0,5(1-0,5)}{100}}} = 2,8$;

f puisque $t > 1,645$ on refuse (H_0) au risque 5 %

DÉCISION :

Au risque 5 % on affirme que le médium n'est pas un imposteur.



Exercice 1 : (12 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

On se propose d'étudier l'évolution en fonction du temps des températures d'un bain et d'un solide plongé dans ce bain. Ces températures (à l'instant t) sont respectivement notées $a(t)$ et $b(t)$. Le temps t est exprimé en secondes et les températures en $^{\circ}\text{C}$.

Partie A :

Les températures $a(t)$ et $b(t)$ vérifient les conditions suivantes :

∂ On pose $f(t) = a(t) - b(t)$;

$\partial - a$) Vérifier que f est une solution de l'équation différentielle : $y' + 0,032 y = 0$;

Solution :

Considérons le système (E) : $a'(t) = -0,011 (a(t) - b(t))$; $b'(t) = 0,021 (a(t) - b(t))$; $f(t) = a(t) - b(t)$; $a(0) = 40$; $b(0) = 10$.

Calcul de $f'(t)$: $f'(t) = a'(t) - b'(t) = -0,011 f(t) - 0,021 f(t) = -0,032 f(t)$; donc $f'(t) = -0,032 f(t)$;

donc f vérifie l'équation différentielle $y' + 0,032 y = 0$;

+ **1 pt (0,25 f ; 0,75 f)**

$\partial - b$) Résoudre l'équation précédente ;

Solution :

+ **1 pt** La solution générale de (E) est l'ensemble des fonctions f définies sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = C e^{-0,032t}$ avec C constante réelle positive

$\partial - c$) Calculer $f(0)$ et montrer que $f(t) = 30 e^{-0,032t}$;

Solution :

$f(0) = C e^{-0,032 \cdot 0} = C = a(0) - b(0) = 40 - 10 = 30$

La solution particulière de (E) est la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = 30 e^{-0,032t}$.

+ **1 pt (0,25 f ; 0,25 f ; 0,5 f)**

Soit F la primitive de f qui vérifie $F(0) = 0$;

$- a$) Exprimer $F(t)$ en fonction de t ;

Solution :

Une primitive de $f(t) = 30 e^{-0,032t}$ est $F(t) = -30 / 0,032 e^{-0,032t} + k$; $F(0) = 0 = -30 / 0,032 e^{-0,032 \cdot 0} + k = -30 / 0,032 + k$
 $= 0$. Donc $k = 30 / 0,032$.

La primitive qui s'annule pour $t=0$ est $F(t) = 30 / 0,032 (1 - e^{-0,032t})$

+ **1,5 pt (0,5 f ; 0,5 f ; 0,5 f)**

$- b$) A l'aide de la condition (2) , justifier que $b(t) = K + 0,021 F(t)$ où K est une constante ;

Solution :

Puisque : $b'(t) = 0,021 f(t)$ donc par intégration : $b(t) = 0,021 F(t) + K$

+ **1 pt**

$- c$) Déterminer K et donner une expression de $b(t)$ en fonction de t ;

Solution :

Puisque $b(t) = 0,021 F(t) + K$ donc : $b(t) = 0,021 \cdot 30 / 0,032 (1 - e^{-0,032t}) + K = 315 / 16 (1 - e^{-0,032t}) + K$

Puisque $b(0) = 315 / 16 (1 - e^{-0,032 \cdot 0}) + K = K = 10 = 160 / 16$

Donc : $b(t) = 315 / 16 (1 - e^{-0,032t}) + 160 / 16 = 315 / 16 + 160 / 16 - 315 / 16 e^{-0,032t} = 475 / 16 - 315 / 16 e^{-0,032t}$

+ **1 pt (0,5 f ; 0,5 f)**

$$\begin{cases} a(t) = \frac{5}{16} \left(95 + 33e^{-\frac{4t}{125}} \right) \\ b(t) = \frac{5}{16} \left(95 - 63e^{-\frac{4t}{125}} \right) \end{cases}$$

Partie C :

Pour tout t dans $[0, +\infty[$ on pose :

∂ Déterminer la limite de a ainsi que celle de b en $+\infty$; que peut-on en déduire pour les courbes représentatives de ces fonctions ;

Solution :

Etude de la limite de a et b quand t tend vers $+\infty$:

$$\text{puisque } \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,032t} = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} a(t) = \frac{475}{16} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = \frac{475}{16}$$

Donc la courbe représentative de a et b admet pour asymptote la droite d'équation $y = 475 / 16$ quand t tend vers $+\infty$:

+ **1,5 pt (0,5 f ; 0,5 f ; 0,5 f)**

Calculer la dérivée et donner les variations de chacune des fonctions a et b ;

Solution :

+ **05 pt** Calcul de la dérivée de a : par définition , $a'(x) = -0,011 (a(t) - b(t)) = -0,011 f(t) = -0,011 \cdot 30 e^{-0,032x}$;

+ **0,5 pt** Calcul de la dérivée de b : par définition , $b'(x) = 0,021 (a(t) - b(t)) = 0,021 f(t) = 0,021 \cdot 30 e^{-0,032x}$;

+ **0,5 pt** puisque $e^{-0,032t} > 0$ pour t réel positif, donc $a'(t) < 0$ pour t réel positif, donc la fonction a est strictement décroissante pour t réel positif ;

+ **0,5 pt** puisque $e^{-0,032t} > 0$ pour t réel positif, donc $b'(t) > 0$ pour t réel positif, donc la fonction b est strictement croissante pour t réel positif .

BTS BIOCHIMIE & ANALYSES BIOLOGIQUES 2001

Devoir n°12 ; BTS 2 BIO&AB ;
Année scolaire 2002/2003
Le 2 Avril 2003

+ 2 pts (0,5 f ; 0,5 f ; 0,5 f ; 0,5 f)

Tableau de variations :

x	0	+•
a'(x)	négatif	
a(x)	40	

x	0	+•
b'(x)	positif	
b(x)	475/16	

Construire les courbes représentatives des fonctions a et b dans un repère orthogonal (sur papier millimétré ; unités graphiques : 1 cm pour 5 secondes en abscisse et 2 cm pour 5°C en ordonnée ; on fera varier t entre 0 et 120 secondes) ;

+ 1,5 pt (0,5 f ; 0,5 f ; 0,5 f ; 0,5 f)

A partir de quel instant la différence de température entre le solide et le bain est-elle inférieure à 1 °C ?

Solution :

1,5 f

– Résoudre l'équation $f(t) \leq 1$ dans l'intervalle $[0, +\infty[$;

$$f(t) \leq 1 \text{ équivaut à } e^{0,032t} \leq \frac{1}{30}$$

$$f(t) \leq 1 \text{ équivaut à } \ln(e^{0,032t}) \leq \ln\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$f(t) \leq 1 \text{ équivaut à } -0,032t \leq \ln\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$f(t) \leq 1 \text{ équivaut à } t \geq -\frac{1}{0,032} \ln\left(\frac{1}{30}\right)$$

$$f(t) \leq 1 \text{ équivaut à } t \geq 107^{\circ}\text{C} ; -\frac{1}{0,032} \ln\left(\frac{1}{30}\right) \approx 106,2^{\circ}\text{C}$$

0,5 f

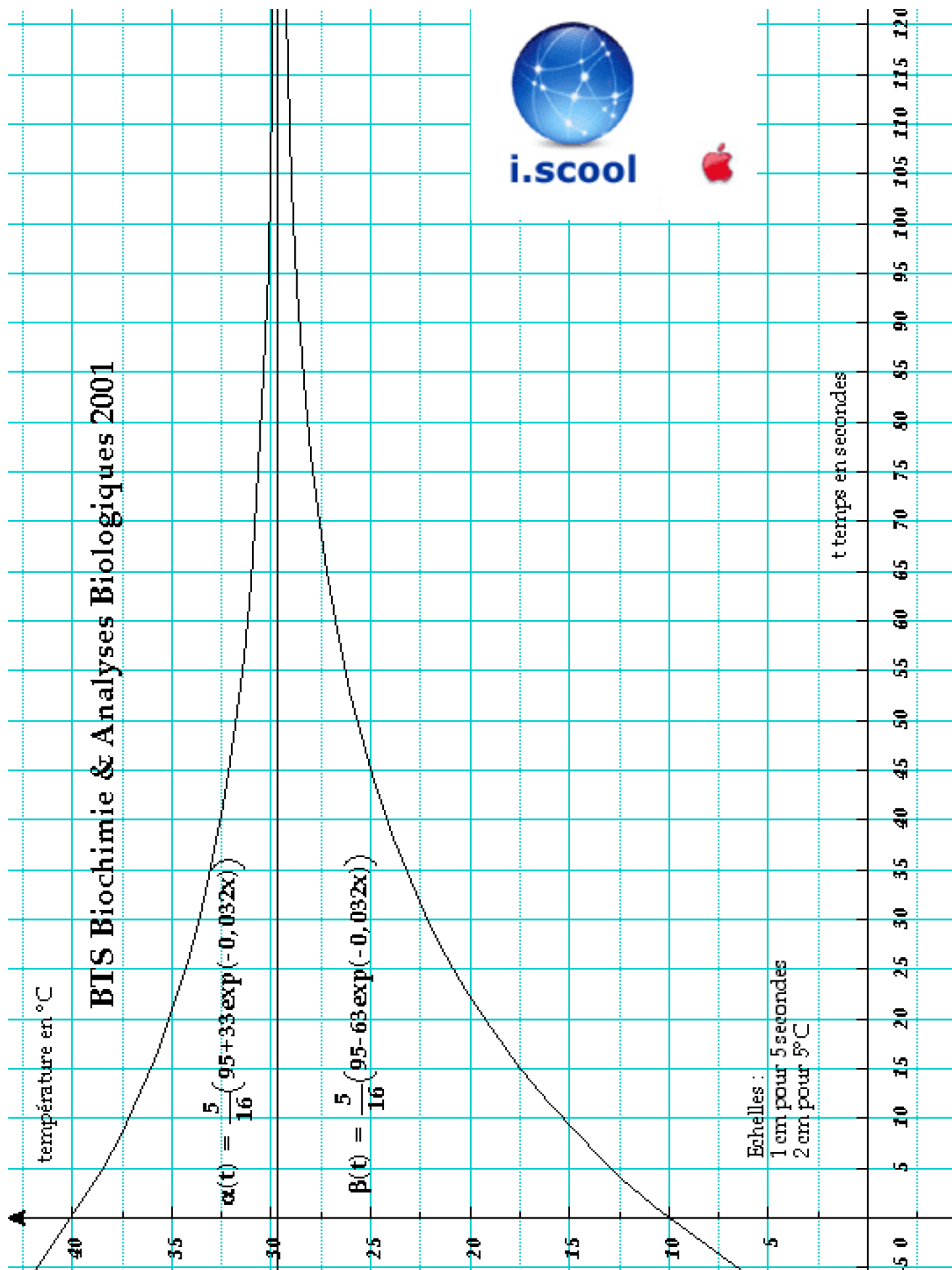
A partir de 107 s la différence de température entre la solide et le bain est inférieure à 1°C.

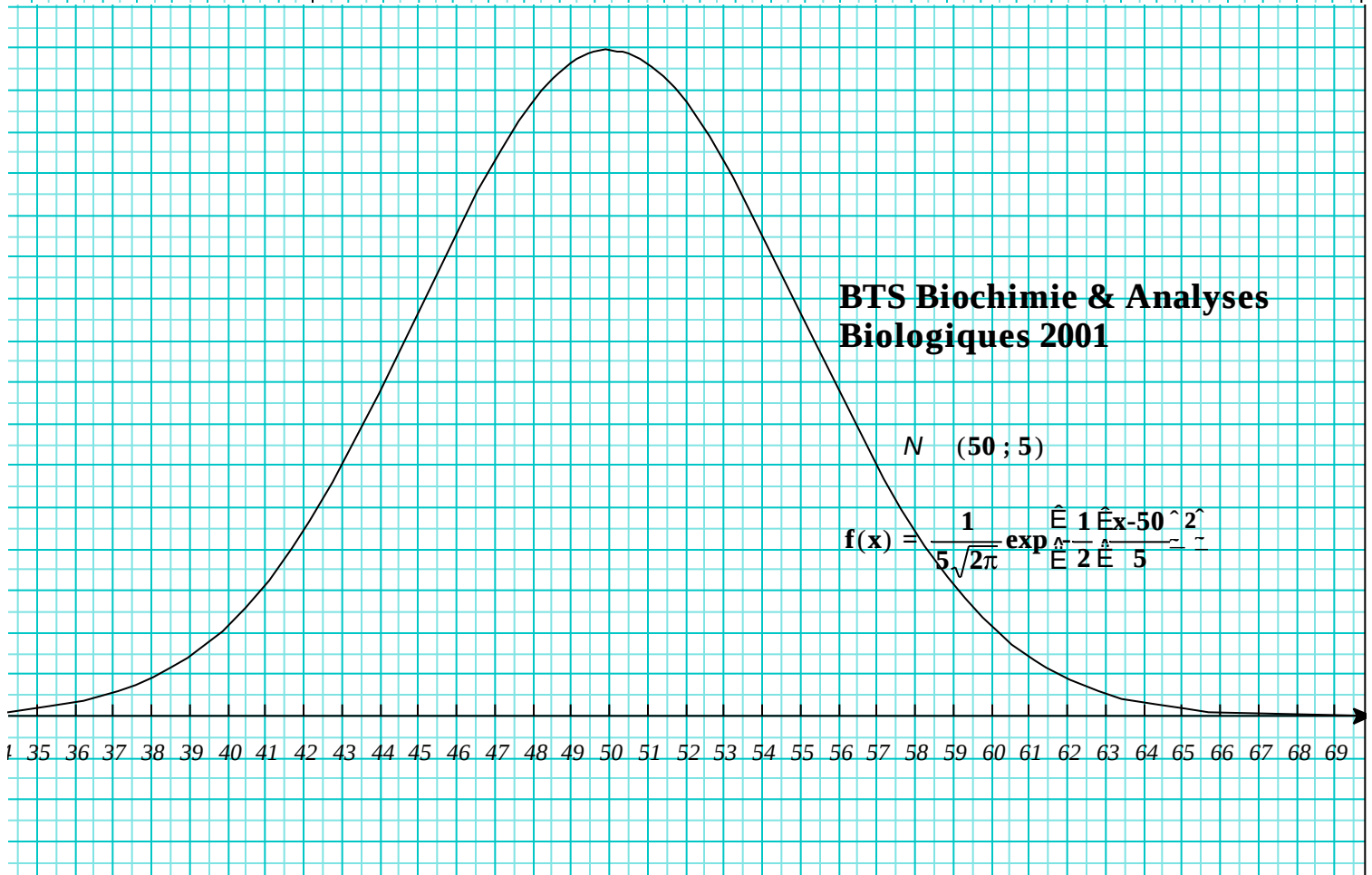
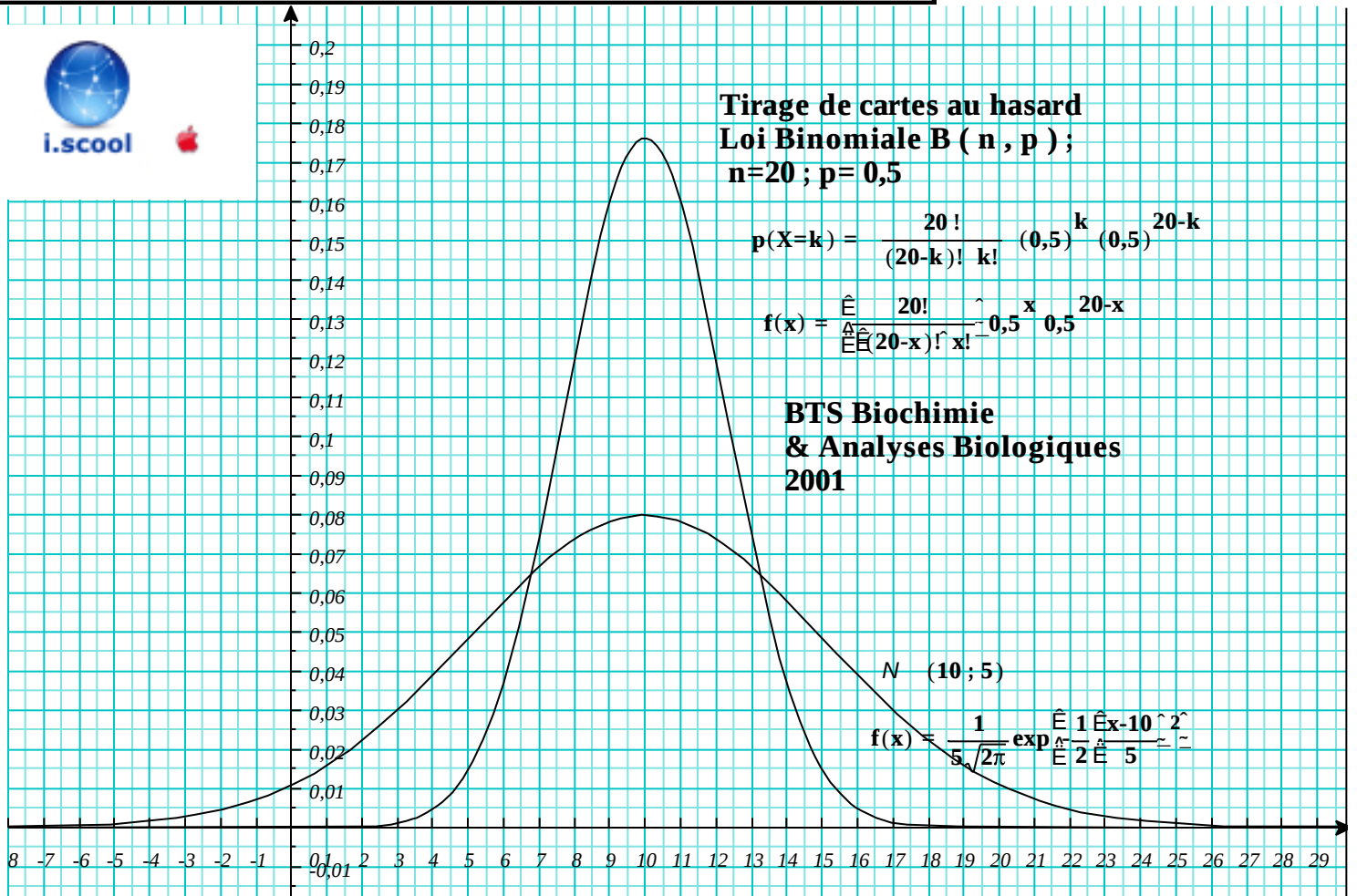
+ 1,5 pt (1 f ; 0,5 f)



i.scool







**BTS Biochimie
& Analyses
Biologiques 2001**

$\mathcal{N} (0,5 ; 0,05)$

$$f(x) = \frac{1}{0,05\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-0,5}{0,05}\right)^2\right)$$

