MATGRD

EXERCICE 1 (11 points)

Les trois parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Pour une étude cardio-vasculaire, on effectue une perfusion lente à débit constant d'une solution marquée par un indicateur radioactif

PARTIE A: Etude expérimentale

On relève l'évolution de la concentration au niveau du ventricule droit et on obtient les résultats suivants :

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i : temps en minutes	0	2	4	6	8	10	12
c_i : concentration en microgrammes par cm^3	0	54	84	100	109	114	117

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

¶ On pose $z_i = \ln(l\,20 - t_i)$ (ln désigne le logarithme népérien).
Donner les valeurs de z_i pour i variant de 1 à 7.

• Déterminer par la méthode des moindres carrés le coefficient de corrélation linéaire de la série (c_i ; z_i) et une équation de la droite de régression de z en t.

‚ Donner une expression de la concentration c en fonction de t déduite de cet ajustement.

PARTIE B : Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction c est solution de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0{,}3y = 36$.

¶ Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0{,}3y = 0$;

• Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E_0) ;

‚ En déduire les solutions de (E_0) et donner la fonction c solution qui vérifie $c(0) = 0$.

PARTIE C : Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(t) = 120(l - e^{-0{,}3t})$

¶ Chercher les variations de f sur $[0 ; \infty[$

• Déterminer la limite de f en $+\infty$; que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

‚ Représenter graphiquement la fonctionf dans un repère orthogonal (unités : 1,5 cm pour une unité en abscisse et 1 mm pour une unité en ordonnée).

„ Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [2; 12] et en donner une valeur approchée à une unité près.

EXERCICE 2 (9 points)

Un atelier produit en grande série des disques de diamètre nominal 25 mm.

PARTIE A :

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque disque de la production, associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ. Un disque est considéré comme valable si son diamètre est compris entre 24,90 mm et 25,08 mm, sinon il est considéré comme défectueux.

¶ On suppose que σ = 0,04. Calculer la probabilité qu'un disque pris au hasard dans la production soit défectueux, dans chacun des deux cas suivants :

¶ **- a)** μ = 25

¶ **- b)** μ = 24,99

• On note X (X barre) la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 disques de la production, associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques. On admet que X (X barre) suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ = 0,004.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 disques dans la production. On souhaite construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, pour savoir si l'on peut considérer, au risque de 5%, que la moyenne μ des diamètres des disques de la production est égale à 25 (μ_0).

• **- a)** Sous l'hypothèse nulle H_0 (μ = 25) :
Calculer la valeur du réel d tel que p (| X - 25 |) < d) = 0,95.

• **- b)** La moyenne des diamètres des 100 disques de l'échantillon prélevé dans la production est 24,994. Quelle est la conclusion du test ?

PARTIE B

On suppose que 3% des disques de la production sont défectueux. On prélève au hasard un lot de 60 disques dans la production ; la production étant très importante, ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 60 disques, associe le nombre de disques défectueux.

¶ **- a)** Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres.

¶ **- b)** Calculer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième le plus proche).

• On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson ;

• **- a)** Donner le paramètre de cette loi de Poisson.

• **- b)** En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième le plus proche).

MATGRD

EXERCICE N°2 :

Un atelier produit en grande série des disques de diamètre nominal 25 mm.

PARTIE A :

On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque disque de la production, associe son diamètre en mm. On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ. Un disque est considéré comme valable si son diamètre est compris entre 24,90 mm et 25,08 mm, sinon il est considéré comme défectueux.

¶ *On suppose que σ = 0,04. Calculer la probabilité qu'un disque pris au hasard dans la production soit défectueux, dans chacun des deux cas suivants :*

Solution :

+ ***2 pts*** X la variable aléatoire qui, à tout disque, associe son diamètre suit la loi normale $N(\mu, 0{,}04)$

Calcul de $p(24{,}90 \le X \le 25{,}08)$:

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $24{,}90 - \mu \le X - \mu \le 25{,}08 - \mu$

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $\dfrac{24{,}90 - \mu}{0{,}04} \le \dfrac{X - \mu}{0{,}04} \le \dfrac{25{,}08 - \mu}{0{,}04}$

pour $\mu = 25$:

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $\dfrac{-0{,}1}{0{,}04} \le \dfrac{X - 25}{0{,}04} \le \dfrac{0{,}08}{0{,}04}$

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $-2{,}5 \le \dfrac{X - 25}{0{,}04} \le 2$

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $24{,}90 - \mu \le X - \mu \le 25{,}08 - \mu$

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $\dfrac{24{,}90 - \mu}{0{,}04} \le \dfrac{X - \mu}{0{,}04} \le \dfrac{25{,}08 - \mu}{0{,}04}$

pour $\mu = 24{,}99$:

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $\dfrac{-0{,}09}{0{,}04} \le \dfrac{X - 25}{0{,}04} \le \dfrac{0{,}09}{0{,}04}$

$24{,}90 \le X \le 25{,}08$ équivalent à $-2{,}25 \le \dfrac{X - 25}{0{,}04} \le 2{,}25$

Soit $T = \dfrac{X - \mu}{0{,}04}$; T suit la loi normale N(0,1

+ ***0,5 pt***

+ $p(24{,}90 < X < 25{,}08) = p(-2{,}5 < T < 2{,}0)$; on applique les propriétés suivantes :
  $p(-t_1 < T < t_2) = p(T < t_2) - p(T < -t_1) = \Pi(t_2) - p(T < -t_1)$ et $p(T < -t_1) = 1 - p(T < t_1) = 1 - \Pi(t_1)$
  Donc $p(-t_1 < T < t_2) = \Pi(t_2) - (1 - \Pi(t_1)) = \Pi(t_2) + \Pi(t_1) - 1$

Pour m = 25 : $t_1 = 2{,}5$ et $t_2 = 2$;

+ ***0,5 pt*** $p(24{,}90 < X < 25{,}08) = \Pi(2) + \Pi(2{,}5) - 1 = 0{,}977\,2 + 0{,}993\,8 - 1 = \mathbf{0{,}971}$.

p(« disque défectueux) = $1 - p(24{,}90 < X < 25{,}08) = 1 - 0{,}971 \approx \mathbf{0{,}029}$.

Pour m = 24,99 : $t_1 = 2{,}25$ et $t_2 = 2{,}25$;

+ ***0,5 pt*** $p(24{,}90 < X < 25{,}08) = \Pi(2{,}25) + \Pi(2{,}25) - 1 = 2\,\Pi(2{,}25) - 1 = 2 \times 0{,}9878 - 1 = 0{,}975\,6 \approx \mathbf{0{,}975}$.

p(« disque défectueux) = $1 - p(24{,}90 < X < 25{,}08) = 1 - 0{,}975 \approx \mathbf{0{,}024}$.

• *On note X (X barre) la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 disques de la production, associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques. On admet que X (X barre) suit la loi normale de moyenne μ et d'écart type σ = 0,004.*

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 100 disques dans la production. On souhaite construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, pour savoir si l'on peut considérer, au risque de 5%, que la moyenne μ des diamètres des disques de la production est égale à 25 (μ_0).

+ ***1,5 pt*** • **- a)** *Sous l'hypothèse nulle H_0 ($\mu = 25$) :*

Calculer la valeur du réel d tel que $p(|\bar{X} - 25| < d) = 0{,}95$.

Solution :

X (Xbarre) la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 disques, associe la moyenne des diamètres suit la loi normale $N(\mu, 0{,}004)$ pour la construction du test on admettra que la valeur standard $\mu_0 = 25$;

+ ***0,25 pt***

Soit $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{0{,}004}$ et $\mu = 25$; T suit la loi normale N(0,1) ;

Donc propriété de la loi normale centrée réduite : $p(|T| \le 1{,}96) = 0{,}95$

$|T| \le 1{,}96$ équivalent à $\left|\dfrac{\bar{X} - 25}{0{,}004}\right| \le 1{,}96$; $|T| \le 1{,}96$ équivalent à $\left|\dfrac{\bar{X} - 25}{0{,}004}\right| \le 1{,}96$

Donc $p\left(\left|\dfrac{\bar{X} - 25}{0{,}004}\right| \le 1{,}96\right) = 0{,}95$; $p(|\bar{X} - 25| \le 1{,}96 \times 0{,}004) = 0{,}95$; $p(|\bar{X} - 25| \le 0{,}00784) = 0{,}95$;

En clair cela signifie que l' intervalle $[25 - 0{,}00784\ ;\ 25 + 0{,}00784] = [24{,}992\,14\ ;\ 25{,}007\,84]$ est l' intervalle de confiance de présence de μ au risque 5% ;

+ ***0,5 pt*** d = 0,004 x 1,96= 0,007 84

+ ***1 pt*** • ***- b)*** *La moyenne des diamètres des 100 disques de l'échantillon prélevé dans la production est 24,994. Quelle est la conclusion du test ?*

Solution :

24,944 appartient à l'intervalle de confiance [24,992 ; 25,008], donc μ est proche de μ_0 au risque 5% et l'hypothèse H_0 est vérifiée.

+ ***1 pt (0,5 pt intervalle ; 0,5 pt réponse ; -0,25 si pas 5%)***

PARTIE B :

On suppose que 3% des disques de la production sont défectueux. On prélève au hasard un lot de 60 disques dans la production ; la production étant très importante, ce prélèvement peut être assimilé à un tirage avec remise.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 60 disques, associe le nombre de disques défectueux.

¶ *- a) Quelle est la loi suivie par Y ? Donner ses paramètres.*

+ ***1 pt*** **Solution :**

+ L'expérience aléatoire qui consiste , après chaque tirage , à mesurer le diamètre du disque, conduit à deux issues contradictoires:

f D : le disque est défectueux avec la probabilité p = 0,03 ;

f D(barre) : le disque n'est pas défectueux avec la probabilité q = 1 - p = 0,97 ;

On peut considérer que les tirages se font avec remise ;

+ Ainsi Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 60 disques, associe le nombre de disques défectueux suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n , p) c'est à dire $\mathcal{B}$ (60 , 0,03). Les paramètres de $\mathcal{B}$ sont n=60 et p=0,03.

De plus E(Y) = np = 60 0,03 = 1,8 et V(X) = np(1-p) = 60 0,03 0,97 ≈ 1,75.

❶ *- b) Calculer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième le plus proche).*

+ ***1,5 pt (0,5 pt*** f ***)*** **Solution :**

Soit l'évènement « le lot de 60 disques contient au moins deux disques défectueux » : (Y ≥ 2) ; p(Y ≥ 2) = 1 - p(Y ≤ 2)

+ ***0,5 pt*** f p(Y ≤ 2) = 60C0. $0,03^{0}$. $0,97^{60}$ + 60C1. $0,03^{1}$. $0,97^{59}$ = 0,1608+0,2984 = 0,459 2 ;

p(Y ≥ 2) = 1 - p(Y ≤ 2) = 1 - 0,459 2 ≈ **0,541**.

❷ *On admet que la loi de Y peut être approchée par une loi de Poisson ;*

❷ *- a) Donner le paramètre de cette loi de Poisson.*

+ ***0,5 pt*** f **Solution :**

+ Puisque : n = 60 (n ≥ 30) , p = 0,03 (p < 0,1) et np = 1,8 (np<10) donc Y peut-être approchée par une Loi de Poisson de paramètres np=1,8.

❷ *- b) En utilisant cette loi de Poisson, calculer la probabilité qu'un lot de 60 disques contienne au moins deux disques défectueux (arrondir au millième le plus proche).*

+ ***1,5 pt (0,5 pt*** f ***)*** **Solution :**

Soit l'évènement « le lot de 60 disques contient au moins deux disques défectueux » : (Y ≥ 2) ; p(Y ≥ 2) = 1 - p(Y ≤ 2)

+ ***0,5 pt*** f p(Y ≤ 2) = $(e^{-1,8}.\ 1,8^{0})/_{0!}$ + $(e^{-1,8}.\ 1,8^{1})/_{1!}$ = 0,1652+0,2975 = 0,462 7 ;

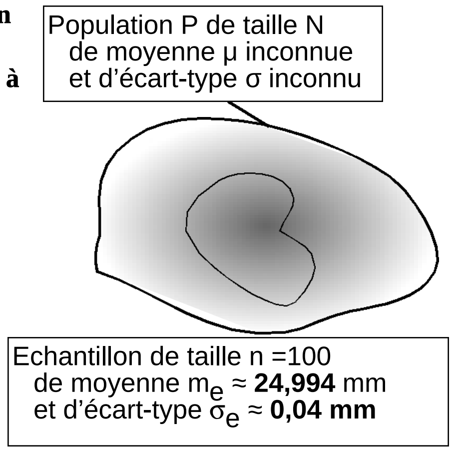
p(Y ≥ 2) = 1 - p(Y ≤ 2) = 1 - 0,462 7 ≈ **0,537**.

REMARQUE :

La question de l'exercice 2 • - a) est très mal présentée ; il suffirait de la rédiger comme suit :

• - a) Sachant que la moyenne des diamètres des 100 disques de l'échantillon prélevé dans la production est 24,994 construire un test bilatéral de validité d'hypothèse, permettant d'affirmer, au risque de 5%, que l'échantillon est conforme à la valeur standard μ_0 = 25 .

• - b) Quelle est la conclusion du test ?



CONSTRUCTION DU TEST BILATERAL:

¶ **LOI D'ÉCHANTILLONNAGE** :

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de taille n=100 disques de la production, associe la moyenne des diamètres de ces 100 disques,

suit la loi normale $N\left(\mu ;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ où μ et σ sont inconnus mais pour lesquels on connait une approximation $\widehat{\mu} = \mu_e$ et $\widehat{\sigma} = \sigma_e$

• **HYPOTHESE À TESTER** : (hypothèse nulle) la valeur standard μ_0 = 25mm

(H_0) hypothèse nulle : « $\mu = \mu_0$ » c'est à dire « le diamètre nominal est 25 mm »

Dès que vous formulez cette hypothèse vous devez , en même temps, imaginer l'hypothèse alternative qui doit être contradictoire ; c'est à dire prendre en compte sous la forme (H_0) : « la durée de vie moyenne est très peu différente de la valeur standard 5 000 »

Le terme " peu différente " implique un test bilatéral.

, **HYPOTHESE ALTERNATIVE - NATURE DU TEST** :

(H_1) : « $\mu \neq \mu_0$ » c'est à dire « le diamètre nominal est différent de 25 mm » ;

le test est bilatéral c'est à dire (H_1) : « $\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0$ »

„ **CONDITIONS DE REJET (H_0) AU RISQUE 5%** :

+ ***Remarque :*** *il s'agit de vérifier que μ ou – plutôt la valeur moyenne calculée sur un échantillon de 100 individus : m_e – appartient ou non à un intervalle d'acceptation centré en μ_0 , dont l'amplitude dépend du seuil de confiance. Le test d'hypothèse est construit à partir d'un outil bien connu : l'intervalle de confiance ; si m_e appartient à l'intervalle, alors (H_0) est vérifiée. Pour réaliser ce calcul nous disposons d'un outil : c'est la loi normale qui, en fonction de ses caractéristiques μ et σ , permettra de calculer cette amplitude.*

f Sous l'hypothèse (H_0) :

$\mu = \mu_0$, dans ce cas $\overline{X}$ suit la loi normale $N\left(0, \sigma\left(\overline{X}\right)\right)$; $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ admet pour approximation $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ et prend pour valeur $\frac{0,04}{\sqrt{100}}$

f Considérons les deux méthodes :

Remarque : *à partir de là deux méthodes sont préconisées :*

Première méthode : *la condition de rejet sera formulée sur la fonction X (X barre) .*

Seconde méthode : *la condition de rejet sera formulée en utilisant la variable* $T = {}^{X}/_{\sigma(X)}$ *; X (X barre).*

Soit : $T = \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$; T suit la loi normale N(0,1) ; $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ admet pour approximation $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ et prend pour valeur $\frac{0,04}{\sqrt{100}}$

* **PREMIERE MÉTHODE :**

+ On recherche un intervalle centré en μ_0 : [-h ; h] tel que l'on ait 95% de chances d'avoir μ proche de μ_0 , c'est à dire p(-h < X (X barre) - μ_0 < h) = 0,95 ;

Sous (H_0) : $\mu = \mu_0$, $\overline{X}$ suit la loi normale $N\left(\mu_0 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ équivalent à $T = \frac{X - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale N(0,1) ; $\sigma\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{0,04}{\sqrt{100}}$

En fait nous avons toute latitude pour rechercher cet intervalle d' acceptation et de refus de (H_0) au risque 5% ;

Il est possible à partir d' un intervalle centré en $\mu_0 = 25$ de rechercher d le rayon de l' intervalle d' acceptation: $p\left(\left|\overline{X} - 25\right| < d\right) = 0,95$

Il est possible de rechercher un intervalle [a ; b] centré en $\mu_0 = 25$: $p\left(a < \overline{X} < b\right) = 0,95$

Ainsi : $p\left(a < \overline{X} < b\right) = p\left(\left|\overline{X} - 25\right| < d\right) = 0,95$ équivalent à $p\left(\left|T\right| < t_\alpha\right) = 0,95$; on sait que $t_\alpha = 1,96$

Ainsi : $|T| < 1,96$ équivalent à $\left|\frac{\overline{X} - 25}{\sigma\left(\overline{X}\right)}\right| < 1,96$ équivalent à $\left|\overline{X} - 25\right| < 1,96\,\sigma\left(\overline{X}\right)$

Donc d = 1,96 x 0,004

En clair : pour | X (X barre) -25 | ≤ d ; il y a 95 % de chances d'avoir μ proche de μ_0 ; d= 1,96 0,004 ≈ 0,007 84

f Conditions de rejet de (H_0) :

Si | X (X barre) -25 | ≤ 0,008 ou si X (X barre) appartient à [24,992 ; 25,008] : on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si | X (X barre) -25 | ≥ 0,008 ou si X (X barre) n'appartient pas à [24,992 ; 25,008] : on refuse (H_0) au risque 5 % ;

* **SECONDE MÉTHODE :**

+ On recherche un intervalle centré en 0 : [-h ; h] tel que l'on ait 95% de chances d'avoir μ - μ_0 proche de 0 ;

La démonstration est la même puisque ma méthode est basée sur l'utilisation de la variable aléatoire T qui est pratiquement le seul outil capable de nous permettre le calcul d'un intervalle de confiance :

f En conclusion :

Si | T | ≤ 1,96 : on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si | T ≥ 1,96 : on refuse (H_0) au risque 5 % ;

˘ **MISE EN OEUVRE DU TEST :**

* **PREMIERE MÉTHODE :**

f Calcul de x = m_e - 25 = 24,994 - 25 = 0,00 6 ; ou 29,994 appartient à [24,992 ; 25,008];

f puisque | x | ≤ 0,008 ou puisque 29,994 appartient à [24,992 ; 25,008], on accepte (H_0) au risque 5 % ;

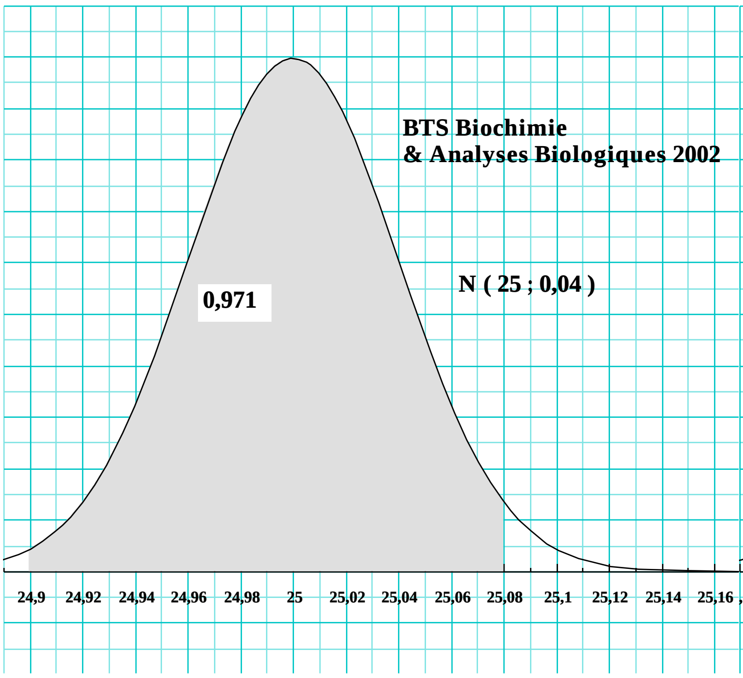
* **SECONDE MÉTHODE :**

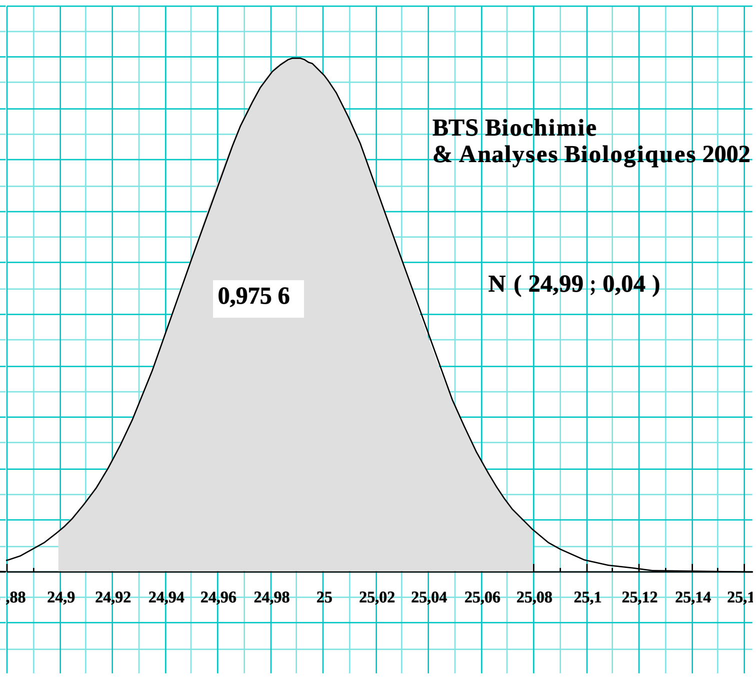
f $t = \frac{m_e - 25}{\sigma\left(\overline{X}\right)} = \frac{24,994 - 25}{0,004} = -1,5$

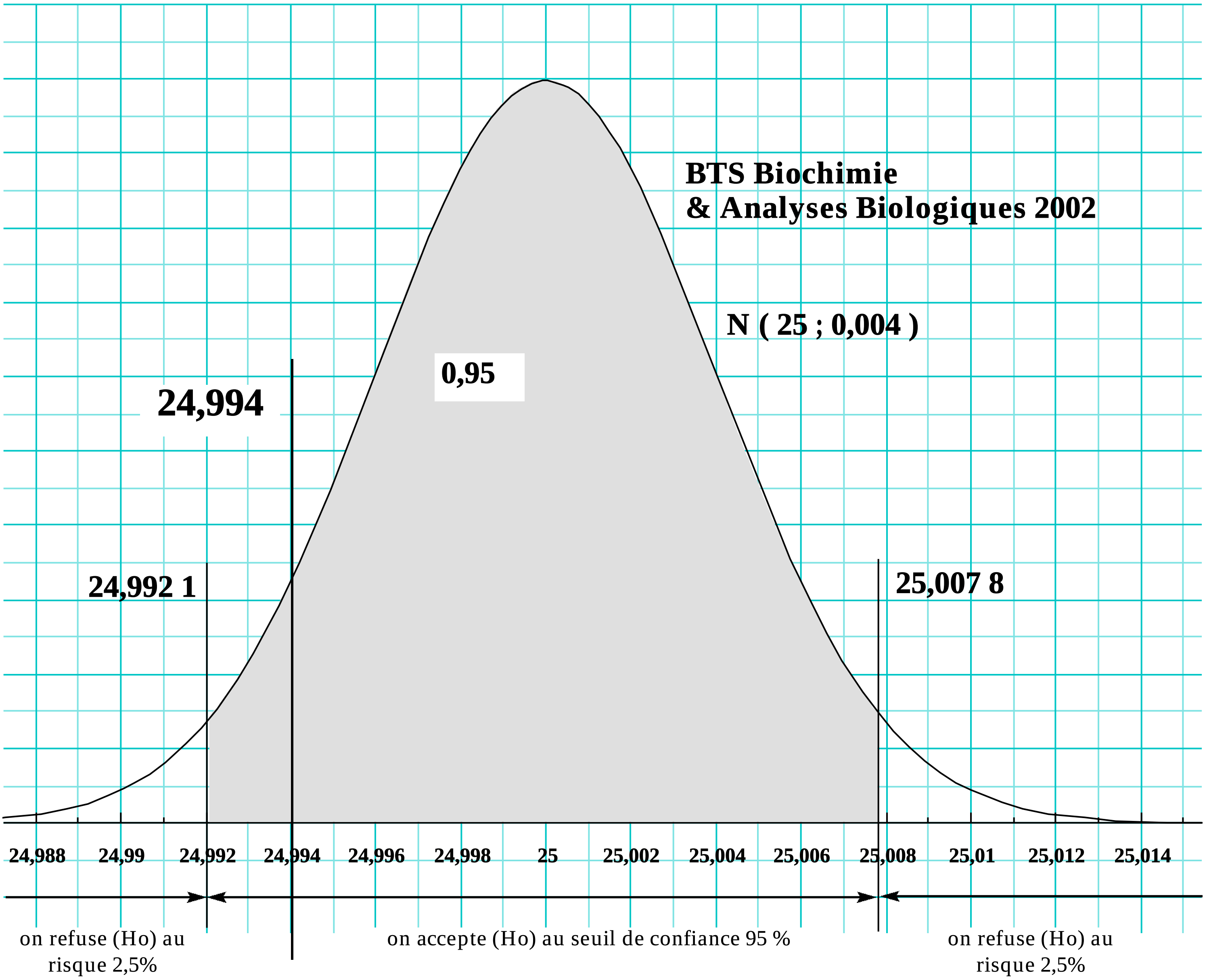
f puisque | t | ≤ 1,96 , on accepte (H_0) au risque 5 % ;

… **DÉCISION :**

Au risque 5 % l'échantillon est conforme à la valeur standard.


BTS Biochimie
& Analyses Biologiques 2002
0,971
N (25 ; 0,04)
24,9 24,92 24,94 24,96 24,98 25 25,02 25,04 25,06 25,08 25,1 25,12 25,14 25,16


BTS Biochimie
& Analyses Biologiques 2002
0,975 6
N (24,99 ; 0,04)
24,9 24,92 24,94 24,96 24,98 25 25,02 25,04 25,06 25,08 25,1 25,12 25,14


BTS Biochimie
& Analyses Biologiques 2002
N (25 ; 0,004)
0,95
24,994
24,992 1
25,007 8
24,988 24,99 24,992 24,994 24,996 24,998 25 25,002 25,004 25,006 25,008 25,01 25,012 25,014
on refuse (Ho) au
risque 2,5%
on accepte (Ho) au seuil de confiance 95 %
on refuse (Ho) au
risque 2,5%

Exercice n°1 :

BTS Biochimie & Analyses Biologiques 2002 : Exercice n°1 Partie A							
temps ti en minutes	0	2	4	6	8	10	12
ci concentration microgrammes	0,00	54,00	84,00	100,00	109,00	114,00	117,00

BTS Biochimie & Analyses Biologiques 2002 : Exercice n°1 Partie A									
	temps ti en minutes	zi = ln(120-ci)		ti*ti	yi*yi	yi*ti	temps ti en minutes	ci concentration microgrammes
	0	4,787		0	22,92	0,00	0	0,00
	2	4,190		4	17,55	8,38	2	54,00
	4	3,584		16	12,84	14,33	4	84,00
	6	2,996		36	8,97	17,97	6	100,00
	8	2,398		64	5,75	19,18	8	109,00
	10	1,792		100	3,21	17,92	10	114,00
	12	1,099		144	1,21	13,18	12	117,00
Total	42	20,84		52,00	10,35	13,00		
Moyenne :	6	2,98		16,00	1,48	-4,87		
Ecart-type :				4,00	1,22			
Droite de régression de y en x :			y = ax + b		r=	-0,999747		
	a =	-0,304	b =	4,804				

PARTIE A: Etude expérimentale

On relève l'évolution de la concentration au niveau du ventricule droit et on obtient les résultats suivants :

Dans cette partie, les résultats seront arrondis au centième le plus proche.

+ ***1 pt***¶ *On pose $z_i = \ln(120 - t_i)$ (ln désigne le logarithme népérien).*

Donner les valeurs de z_i pour i variant de 1 à 7.

- 0,25 pt par erreur sur un arrondi

- 0,5 pt par erreur de calcul

+ ***1,5 pt***• *– Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série et donner une équation de la droite de régression de z en t (les coefficients seront arrondis au centième le plus proche) ;*

+ ***0 pt*** Puisque r le coefficient de corrélation linéaire de la série (t_i ; z_i) est égal en valeur approchée à -0,999 donc l'ajustement affine est justifié.

+ ***1,5 pt*** Une équation de la droite de régression de z en t obtenue par la méthode des moindres carrés est z = -0,30 t + 4,8.

- 0,25 pt par erreur sur un arrondi ; ***0,75 pt pour a et 0,75 pt pour b***

‚ *– Donner l'expression de c en fonction de t déduite de cet ajustement ;*

$$z = \ln(120 - c) = -0{,}3t + 4{,}8 \text{ équivalent à } \exp(\ln(120 - c)) = \exp(-0{,}3t + 4{,}8)$$
$$z = \ln(120 - c(t)) = -0{,}3t + 4{,}8 \text{ équivalent à } 120 - c(t) = e^{-0{,}3t + 4{,}8}$$
$$z = \ln(120 - c(t)) = -0{,}3t + 4{,}8 \text{ équivalent à } 120 - e^{-0{,}3t + 4{,}8} = c(t)$$
$$z = \ln(120 - c(t)) = -0{,}3t + 4{,}8 \text{ équivalent à } c(t) \approx 120 - 121{,}51\, e^{-0{,}3t}$$

$$c \ge 119 \text{ équivalent à } 120 - e^{-0{,}3t + 4{,}8} \ge 119$$
$$c \ge 119 \text{ équivalent à } 120 - 119 \ge e^{-0{,}3t + 4{,}8}$$
$$c \ge 119 \text{ équivalent à } 1 \ge e^{-0{,}3t + 4{,}8}$$
$$c \ge 119 \text{ équivalent à } \ln 1 \ge \ln\left(e^{-0{,}3t + 4{,}8}\right)$$
$$c \ge 119 \text{ équivalent à } 0 \ge -0{,}3t + 4{,}8$$
$$c \ge 119 \text{ équivalent à } 0{,}3t \ge 4{,}8$$
$$c \ge 119 \text{ équivalent à } t \ge 19 \text{ min}$$

+ ***1,5 pt par modification du barème (+ 0,5 pt)***

„ *– En supposant que l'expression obtenue en reste valable, déterminer à partir de quel temps on obtiendra une valeur de c supérieure ou égale à 119 ;*

+ ***0 pt***

EXERCICE N°1 : ***PARTIE B : Résolution d'une équation différentielle***

On admet que la fonction c est solution de l'équation différentielle (E_0) : y' + 0,3y = 36

+ ***1 pt*** ¶ *Résoudre l'équation différentielle (E_1) : y' + 0,3y = 0 ;*

Solution :

(E_1) : y' +0,3y = 0 Equation différentielle linéaire sans second membre

+ ***1 pt*** La solution générale de (E_1) est l'ensemble des fonctions y définies sur [0 , + ∞ [par y(t) = C e $^{-0,3t}$ avec C constante réelle positive.

+ ***0,5 pt*** • *Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E_0) ;*

Solution :

(E_0) : y' +0,3y = 36 ; on note y=k , (y'=0) , la solution constante de (E_0) ; donc

Ainsi le système : y' +0,3y = 36 , y=k , y'=0 équivalent à y' +0,3y = 36 , 0,3y=36 , y'=0

+ ***0,5 pt***La solution constante de (E_0) est la fonction y ayant pour expression f(t) = 120.

+ ***1,5 pt*** ‚ *En déduire les solutions de (E_0) et donner la fonction c solution qui vérifie c(0) = 0.*

Solution :

+ ***0,5 pt***La solution générale de (E_0) est la somme de la solution générale de (E_1) et de la solution particulière de l'équation avec second membre (ici une fonction constante) : c(t) = 120 + C e $^{-0,3t}$ avec C constante réelle positive

+ ***1 pt*** pour t = 0 c(0) = 0 = 120 + C e $^{-0,3x0}$ = 120 + C = 0 ; donc C = -120 ;

La solution particulière de (E_0) est la fonction qui a pour expression c(t) = 120 - 120 e $^{-0,3t}$ = 120 (1 - e $^{-0,3t}$).

+ ***1,5 pt par modification du barème (+ 0,5 pt)***

Solution :

Résolution par changement de variable : considérons z(t) = y(t) - 120 donc z'(t) = y'(t) et y' + 0,3 (y -120) = 0

(E_0) équivalente à z'(t) = 0,3 z(t) ; La solution générale de (E_0) est l'ensemble des fonctions z définies sur [0 , + ∞ [par z(t) = C e $^{-0,3t}$ avec C constante réelle positive ; en fait **y(t) - 120 = C e $^{-0,3t}$** .

EXERCICE N°1 : Partie C :

+ ***1 pt*** ¶ *– Déterminer la limite de f quand t tend vers + ∞ ; que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?*

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0,3t} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 120 - 120e^{-0,3t} = 120$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(t) = 120$

+ ***0,5 pt***
+ ***0,5 pt*** La courbe admet la droite d'équation y = 120 comme asymptote quand x tend vers + ∞.

+ ***1 pt*** • *– Chercher les variations de la fonction f sur [0 , + ∞ [;*
+ ***0,5 pt*** Calcul de la dérivée : $f'(t) = -0,3\ (-120\ e^{-0,3t}) = 36\ e^{-0,3t}$
+ ***0,5 pt*** puisque : $e^{-0,3t} \geq 0$ pour t réel positif **[f *,0,25 pt*]** donc f'(t) > 0 pour x réel positif, donc la fonction f est strictement croissante pour t réel positif .

Tableau de variations :

+ ***0 pt***

x	0	+∞
f'(x)	positif	
f(x)	0 ↗	120
	0	

+ ***1 pt* [f *0,25 pt justification du signe de $e^{-0,3t}$*]**

+ ***2 pts*** ‚ *– Représentation graphique ;*
+ ***0,5** pt fidélité de la courbe* **+ *0,5 pt*** *soin et* ***0,5 pt*** *respect des échelles* **+ *0,5*** *pt asymptote*

„ *– Résoudre l'équation f(x) ≤ 119 dans l'intervalle [0 , + ∞ [; vérifier graphiquement*

+ ***0 pt*** Donc t ≥

+ ***0 pt par modification du barême*** „ *– Calculer la valeur moyenne de la fonction dans l'intervalle [2 ; 12 [; on donnera une valeur exacte et une valeur à une unité près :*

Valeur moyenne de f sur [2;12] : $V = \frac{1}{12-2}\int_2^{12} 120\left(1 - e^{-0,3t}\right)dt$

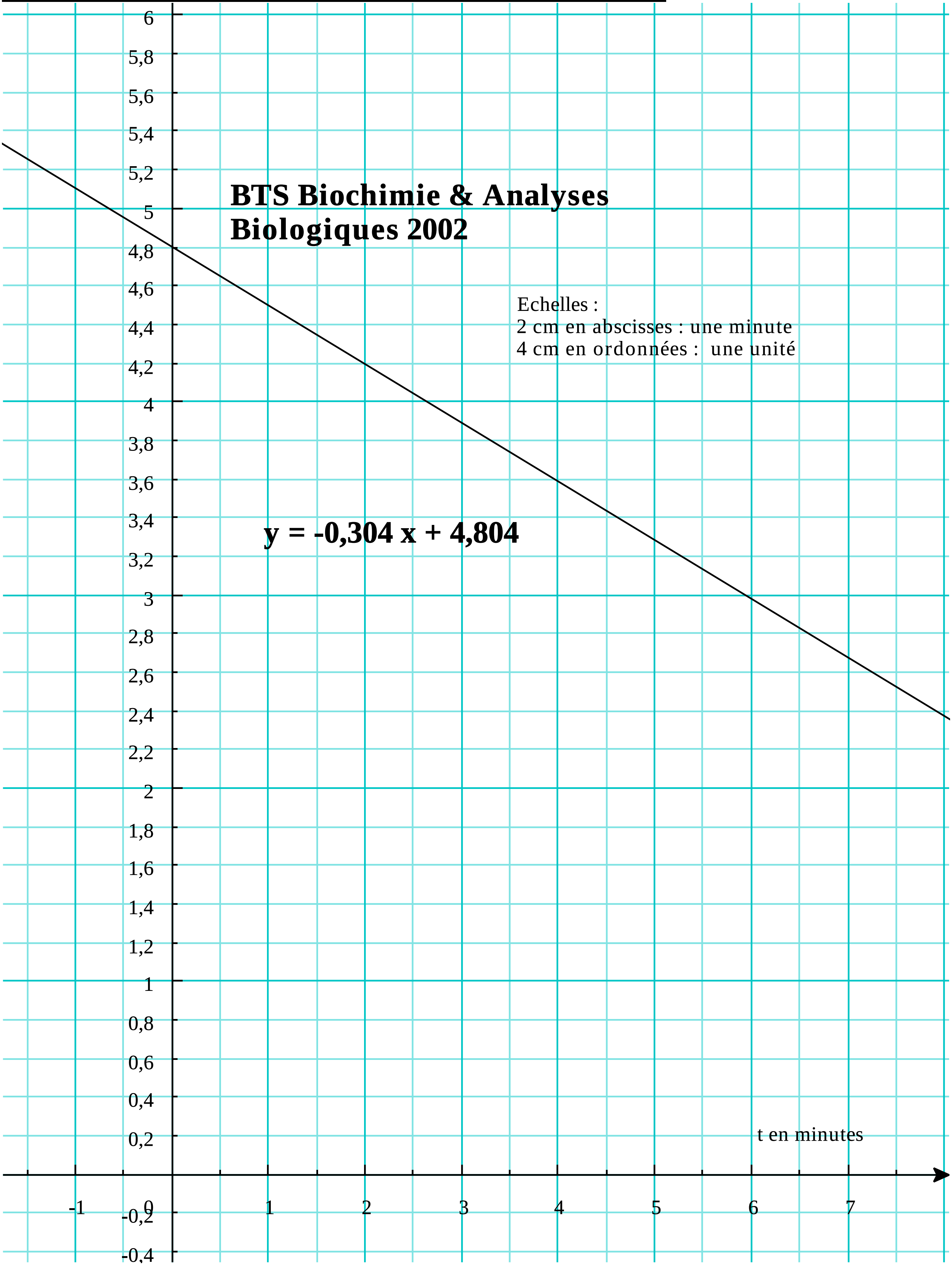
La primitive de 120 est 120 t + k ; la primitive de 120 $e^{-0,3t}$ est : $\frac{120}{-0,3} e^{-0,3t} + k = -400\ e^{-0,3t} + k$

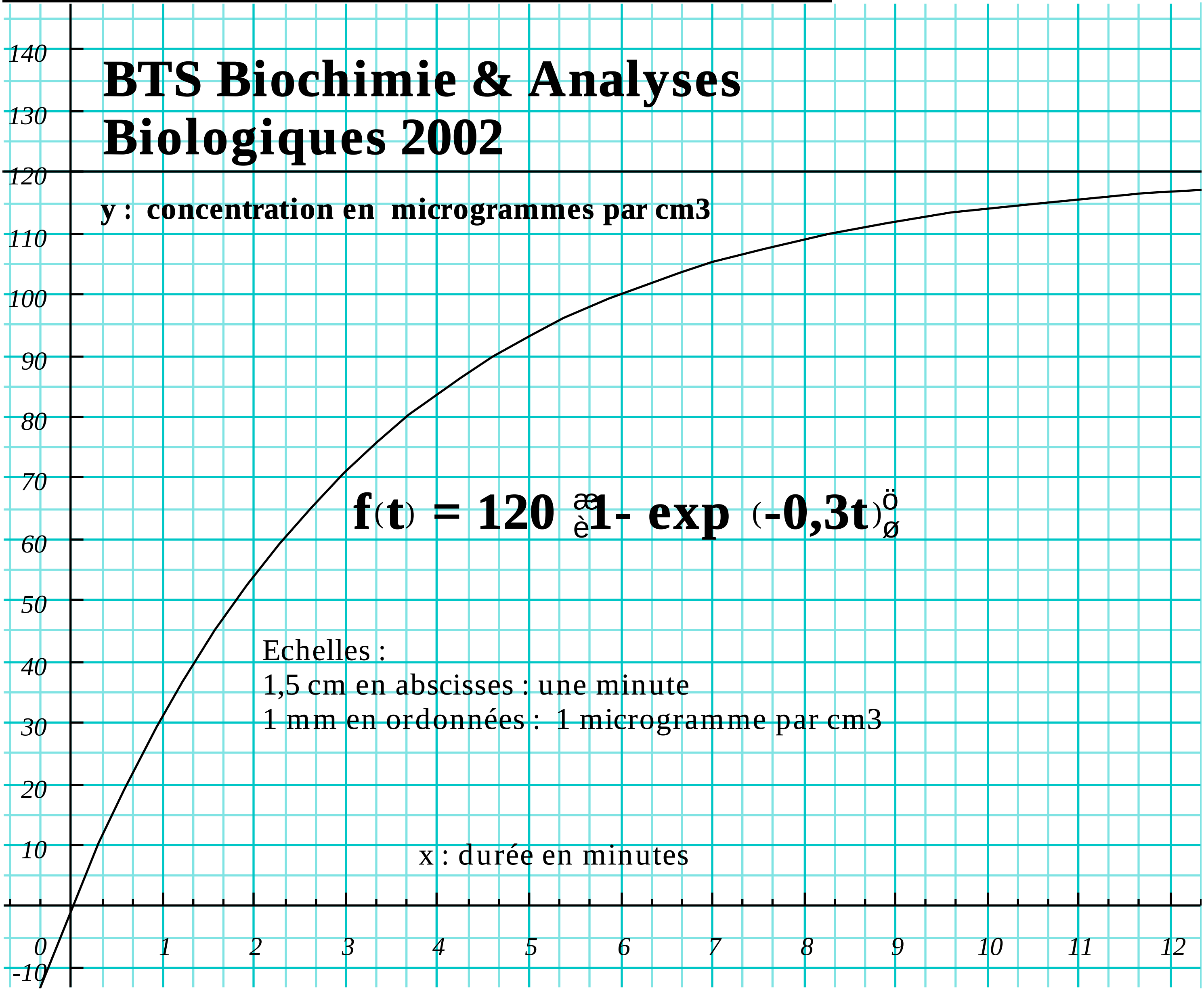
$$V = \frac{1}{12-2}\int_2^{12} 120\left(1 - e^{-0,3t}\right)dt = \frac{1}{10}\left[120\,t - 400e^{-0,3t}\right]_2^{12} = \frac{1}{10}\left[120\ 12 - 400e^{-0,3\ 12} - \left(120\ 2 - 400e^{-0,3\ 2}\right)\right]$$

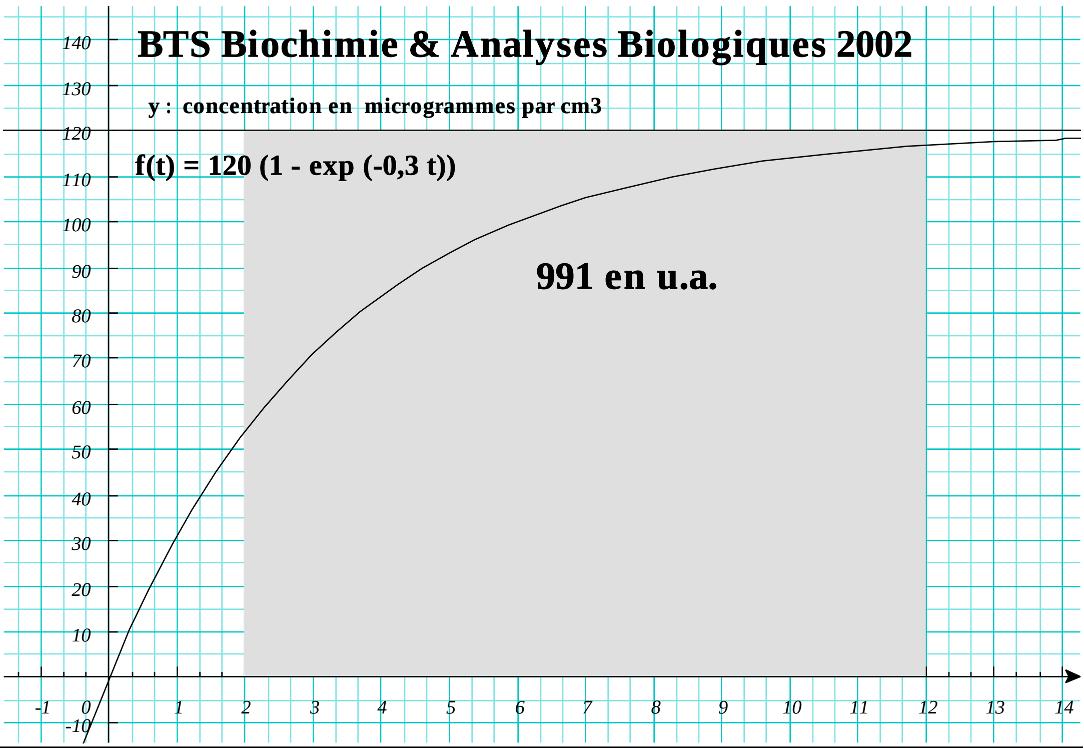
$$V = \frac{1}{12-2}\int_2^{12} 120\left(1 - e^{-0,3t}\right)dt = \frac{1}{10}\left[1440 - 240 - 400e^{-3,6} + 400e^{-0,6}\right]$$

$$V = \frac{1}{12-2}\int_2^{12} 120\left(1 - e^{-0,3t}\right)dt = \frac{1}{10}\left[1200 - 400\,(e^{-3,6} + e^{-0,6})\right] \approx 99,1$$

+ ***1,5 pt***


BTS Biochimie & Analyses Biologiques 2002
Echelles :
2 cm en abscisses : une minute
4 cm en ordonnées : une unité
y = -0,304 x + 4,804
t en minutes
6
5,8
5,6
5,4
5,2
5
4,8
4,6
4,4
4,2
4
3,8
3,6
3,4
3,2
3
2,8
2,6
2,4
2,2
2
1,8
1,6
1,4
1,2
1
0,8
0,6
0,4
0,2
0
-0,2
-0,4
-1
1
2
3
4
5
6
7


BTS Biochimie & Analyses Biologiques 2002
y : concentration en microgrammes par cm3
f(t) = 120 (1- exp (-0,3t))
Echelles :
1,5 cm en abscisses : une minute
1 mm en ordonnées : 1 microgramme par cm3
x : durée en minutes


BTS Biochimie & Analyses Biologiques 2002
y : concentration en microgrammes par cm3
f(t) = 120 (1 - exp (-0,3 t))
991 en u.a.

i.scool