BTS BIO-INDUSTRIES 1995

Exercice 1 : (9 points)

Les valeurs décimales approchées des résultats numériques seront données à 10^{-2} près.

Sur chaque type de terrain ; les melons produits à la même époque ont la même probabilité d'avoir un taux de sucre suffisant.

Partie A :

Erwan a un bon terrain : le 14 Juillet de cette année, chaque melon a la probabilité $p_a = 0{,}01$ d'avoir un taux de sucre insuffisant. Il emporte un échantillon de 200 dans sa charrette pour les contrôler.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de melons de la charrette dont le taux de sucre est insuffisant.

¶ — Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ;
• — Calculer l'expérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(x)$;
, — Justifier l'approximation de la loi de X par une loi de Poisson et préciser son paramètre ;
„ — calculer $p(X > 3)$.

Partie B :

Gwenael a un terrain mal exposé : ce même 14 Juillet de cette année, chacun de ces melons a la probabilité $p_b = 0{,}6$ d'avoir un taux de sucre suffisant.

Dans un échantillon de n (n = 100) melons de Gwenael, on note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de melons de la charrette dont le taux de sucre est suffisant et $F = {}^{Y}/_{n}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur leur proportion dans l'échantillon.

¶ — Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y ;
• — Calculer l'expérance mathématique E(Y) et l'écart-type $\sigma(Y)$ en fonction de n et p_b ; montrer que l'on peut approcher Y par une loi normale :

En déduire que la variable aléatoire F admet pour écart-type :

$$\sigma(F) = \sqrt{\frac{p_b\left(1 - p_b\right)}{n}}$$

Pour n=100, on admettra que l'on peut approcher la loi de F par une loi normale.

Partie C :

Un échantillon de 100 melons de provenance inconnue est passé au contrôle. 48 de ces melons ont un taux de sucre suffisant.

, — Peut-on, au seuil de risque 5 % , rejetter l'hypothèse suivant laquelle cet échantillon provient de la production de Gwenael ? (comparer la proportion observée à la proportion théorique 0,6).

BTS BIO-INDUSTRIES 1995

Exercice 1 : (9 points)

Les valeurs décimales approchées des résultats numériques seront données à 10^{-2} près.
Sur chaque type de terrain ; les melons produits à la même époque ont la même probabilité d'avoir un taux de sucre suffisant.

Partie A :

Erwan a un bon terrain : le 14 Juillet de cette année, chaque melon a la probabilité $p_a = 0{,}01$ d'avoir un taux de sucre suffisant. Il emporte un échantillon de 200 dans sa charrette pour les contrôler.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de melons de la charrette dont le taux de sucre est insuffisant.

¶ — *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X ;*

Solution :

\+ L'expérience aléatoire qui consiste à contrôler le taux de sucre d'un melon, conduit à deux issues contradictoires:

- f I : le taux de sucre est insuffisant avec la probabilité p = 0,01 ;
- f I(barre) : le taux de sucre est suffisant avec la probabilité q = 1 - p = 0,99 ;

\+ On peut considérer que les contrôles sont effectués sur un échantillon dont la taille n = 200 est très petite par rapport à la population des melons ; ceci nous permet d'assimiler ces contrôles à des tirages successifs indépendants.

Ainsi X la variable aléatoire qui, aux 200 contrôles de melons, associe le nombre de melons dont le taux de sucre est insuffisant suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n , p) c'est à dire $\mathcal{B}$ (200 , 0,01).

• — Calculer l'expérance mathématique E(X) et l'écart-type $\sigma(x)$;

Solution :

De plus E(X) = np = 200.0,01 = 2 et V(X) = np(1-p) = 200 0,01 0,99 ≈ 2.

, — *Justifier l'approximation de la loi de X par une loi de Poisson et préciser son paramètre ;*

Solution :

Pour réaliser une approximation de X par une loi de Poisson les conditions sont : $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $np \leq 10$;

Dans le cas présent n = 200 ; p = 0,01 et np = 2 ; donc on peut approximer la variable aléatoire X par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np = 2$.

„ — *calculer p(X > 3).*

Solution :

Les évènements (X > 3) et (X ≤ 3) sont contradictoires,
donc p(X > 3) = 1 - p(X ≤ 3) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) ≈ 1- (0,135+0,271+0,271+0,180) = 1 -0,857 = 0,143.

Partie B :

Gwenael a un terrain mal exposé : ce même 14 Juillet de cette année, chacun de ces melons a la probabilité $p_b = 0{,}6$ d'avoir un taux de sucre suffisant.

Dans un échantillon de n melons de Gwenael, on note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de melons de la charrette dont le taux de sucre est suffisant et $F = {}^{Y}/_{n}$ la variable aléatoire qui prend pour valeur leur proportion dans l'échantillon.

¶ — *Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y et montrer que l'on peut approcher Y par une loi normale ;*

Solution :

\+ L'expérience aléatoire qui consiste à contrôler le taux de sucre d'un melon, conduit à deux issues contradictoires:

- f S : le taux de sucre est suffisant avec la probabilité p = 0,6 ;
- f S(barre) : le taux de sucre est suffisant avec la probabilité q = 1 - p = 0,4 ;

\+ On peut considérer que les contrôles sont effectués sur un échantillon dont la taille n (n = 100) est très petite par rapport à la population des melons ; ceci nous permet d'assimiler ces contrôles à des tirages successifs indépendants.

Ainsi Y la variable aléatoire qui, aux n (n = 100) contrôles de melons, associe le nombre de melons dont le taux de sucre est suffisant suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n , p_b) c'est à dire $\mathcal{B}$ (100 , 0,6).

• — *Calculer l'expérance mathématique E(Y) et l'écart-type $\sigma(Y)$ en fonction de n et p_b ; et montrer que l'on peut approcher Y par une loi normale ;*

De plus $E(Y) = np_b = 100.0{,}6 = 60$ et $V(Y) = np_b(1-p_b) = 100\ 0{,}6\ 0{,}4 = 24$.

Pour réaliser une approximation de Y par une loi normale les conditions sont : $n \geq 30$ et $np > 10$;

Dans le cas présent n = 100 ; p = 0,6 et np = 60 ; donc on peut approximer la variable aléatoire Y par une loi de moyenne $np_b = 60$ et de variance $V(Y) = np_b(1-p_b) = 24$.

Pour les variables aléatoires Y et X telles que : Y = aX + b : $E(Y) = a\,E(X) + b$; $V(Y) = a^2\ V(X)$

Puisque $F = \frac{Y}{n}$ donc : $E(F) = \frac{1}{n}\ E(Y) + b$; $V(F) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(Y)$

Par suite : $E(F) = \frac{1}{n}\ np_b = p_b$; $V(F) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 \left(np_b\left(1 - p_b\right)\right) = \frac{p_b\left(1 - p_b\right)}{n}$; $\sigma(F) = \sqrt{\frac{p_b\left(1 - p_b\right)}{n}}$

Partie C :

Un échantillon de 100 melons de provenance inconnue est passé au contrôle. 48 de ces melons ont un taux de sucre suffisant.

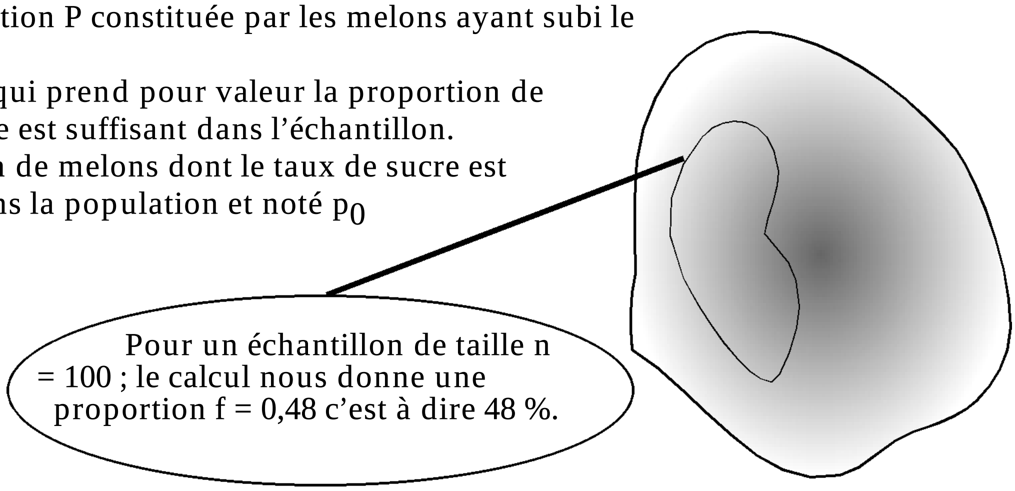
, — Peut-on, au seuil de risque 5 % , rejetter l'hypothèse suivant laquelle cet échantillon provient de la production de Gwenael ? (comparer la proportion observée à la proportion théorique 0,6).

Solution :

Considérons la population P constituée par les melons ayant subi le contrôle de taux de sucre.

F la variable aléatoire qui prend pour valeur la proportion de melons dont le taux de sucre est suffisant dans l'échantillon.

Toutefois la proportion de melons dont le taux de sucre est suffisant est estimé à 0,6 dans la population et noté p_0 conventionnellement ;



CONSTRUCTION DU TEST BILATÉRAL:

À **LOI D'ÉCHANTILLONNAGE** :

La variable aléatoire F qui, à tout échantillon de 100 melons contrôlés, associe la proportion de melons dont le taux de sucre est suffisant, suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p_b\,;\sqrt{\frac{p_b(1-p_b)}{n}}\right)$ où p_b admet pour estimateur $\hat{p}$

› **HYPOTHESE À TESTER** : (hypothèse nulle) la valeur standard $p_0 = 0,6$

(H_0) hypothèse nulle : « $p = p_0$ » « la proportion de melons dont le taux de sucre est peu différente de 0,6 » ou encore « l'échantillon provient de chez Gwenael »

Le terme " peu différente " suppose un test bilatéral.

ﬁ **HYPOTHESE ALTERNATIVE - NATURE DU TEST** :

(H_1) : « $p \neq p_0$ » c'est à dire « la proportion de melons dont le taux de sucre est est différente de 0,6 » ou encore « l'échantillon ne provient pas de chez Gwenael »et le test est bilatéral.

ﬂ **CONDITIONS DE REJET (H_0) AU RISQUE 5%** :

Remarque : *il s'agit de vérifier que la proportion f de l'échantillonde 100 melonss appartient ou non à un intervalle d'acceptation centré en p_0 = 0,6, dont l'amplitude dépend du seuil de confiance. Pour réaliser ce calcul nous disposons d'un outil : c'est la loi normale qui, en fonction de ses caractéristiques* μ *et* σ *, permettra de calculer cette amplitude.*

f Sous l'hypothèse (H_0) : $p = p_0$ donc F suit la loi normale $\mathcal{N}$ (0,6 , $\sigma(F)$) ; $\sigma(F)$ calculable ;

Remarque : *à partir de là deux méthodes sont préconisées :*

Première méthode : *la condition de rejet sera formulée sur la fonction F ,sur un intervalle de valeurs prises par F ;.*

Seconde méthode : *la condition de rejet sera formulée en utilisant la variable* $T = {}^{F-p_0}/_{\sigma(F)}$

T variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite .

* ***Première méthode***

F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}\right)$ équivalent à $T = \frac{F - p_0}{\sigma(y)}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Ainsi : $p(|F| \leq a) = 0{,}95$ équivalent à $p(|T| \leq t_\alpha) = 0{,}95\ [\Pi(t_\alpha) = 0{,}975]$

Par lecture dans la table $t_\alpha = 1{,}96$

Ainsi : $|T| \leq 1{,}96$ équivalent à $\left|\frac{F - p_0}{\sigma(F)}\right| \leq 1{,}96$ équivalent à $|F - p_0| \leq 1{,}96\ \sigma(F)$

ou encore : $p_0 - 1{,}96\ \sigma(F) \leq F \leq p_0 + 1{,}96\ \sigma(F)$

Ainsi l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse (H_0) est : $[p_0 - 1{,}96\ \sigma(F) ; p_0 + 1{,}96\ \sigma(F)]$

+ On recherche un intervalle centré en $p_0 = 0{,}6$: $[0{,}6 - h ; 0{,}6 + h]$ tel que l'on ait 95% de chances d'avoir f = 0,48 appartenant à cet intervalle , c'est à dire tel que $p(0{,}6 - h < F < 0{,}6 + h) = 0{,}95$;

f En conclusion :

Si f appartient $[0{,}6 - 1{,}96\ \sigma(F) ; 0{,}6 + 1{,}96\ \sigma(F)]$: on accepte (H_0) au risque 5 % ;

F suit la loi normale $\mathcal{N}\left(p_0, \sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}\right)$ équivalent à $T = \frac{F - p_0}{\sigma(y)}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$

Ainsi : $p(|F| \leq a) = 0{,}95$ équivalent à $p(|T| \leq t_\alpha) = 0{,}95\ [\Pi(t_\alpha) = 0{,}975]$

Par lecture dans la table $t_\alpha = 1{,}96$

Si f n'appartient pas à $[0{,}6 - 1{,}96\ \sigma(F) ; 0{,}6 + 1{,}96\ \sigma(F)]$: on refuse (H_0) au risque 5 % ;

* ***Seconde méthode :***

f En conclusion :

Si $|T| \leq 1{,}96$: on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si $|T \geq 1{,}96$: on refuse (H_0) au risque 5 % ;

° MISE EN OEUVRE DU TEST :

* ***Première méthode :***

f Calcul de $[0{,}6 - 1{,}96\ \sigma(F) ; 0{,}6 + 1{,}96\ \sigma(F)]$; $1{,}96\ \sigma(F) = 1{,}96 \times 0{,}049 = 0{,}096$

Donc : $[0{,}02 - 1{,}96\ \sigma(F) ; 0{,}02 + 1{,}96\ \sigma(F)] = [0{,}6 - 0{,}096 ; 0{,}6 + 0{,}096] = [0{,}504 ; 0{,}696] \approx [0{,}50 ; 0{,}70]$

f puisque f = 0,48 donc f < 0,50 ; on refuse (H_0) au risque 5 %

* ***Seconde méthode :***

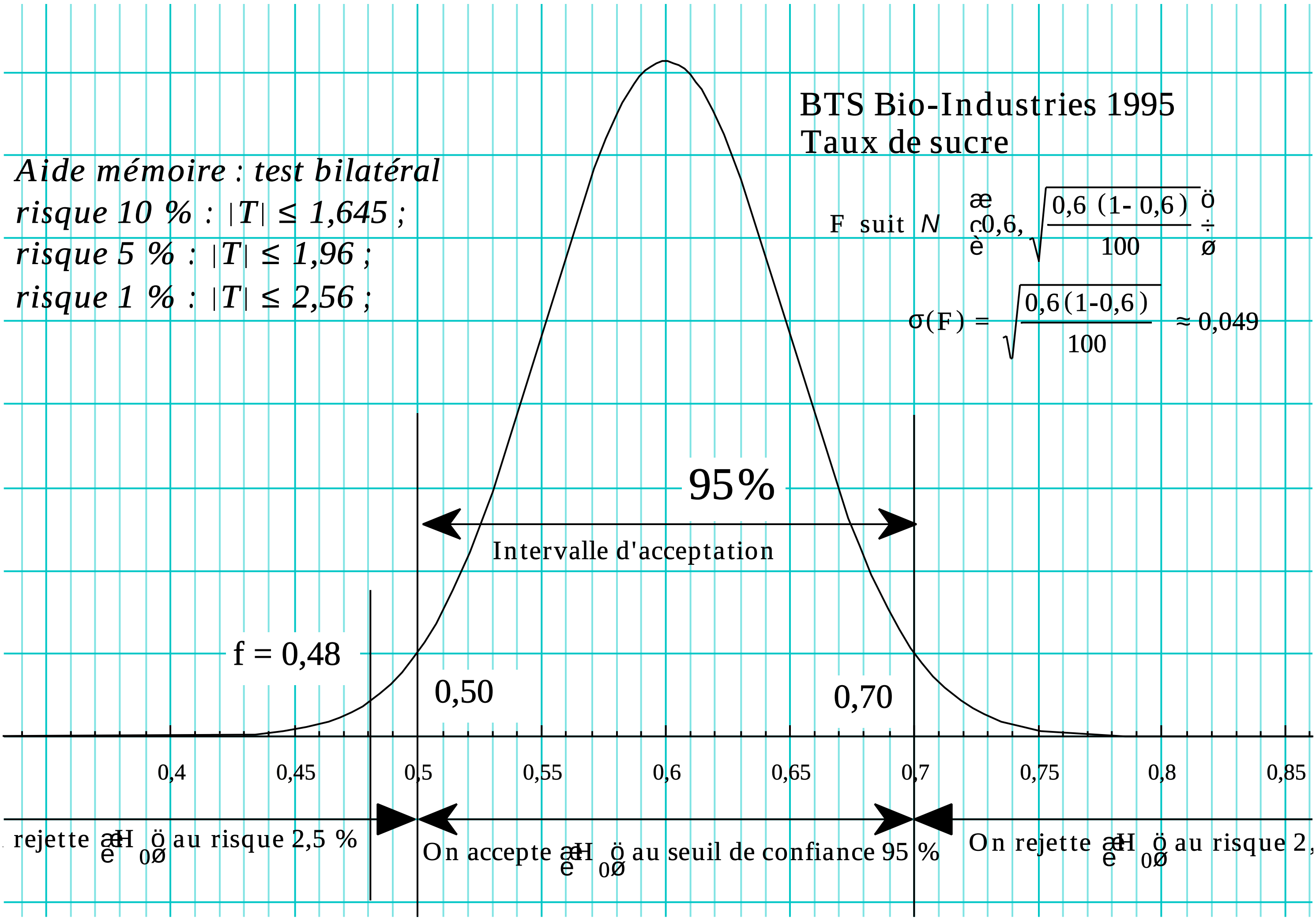
f

calcul de $t = \frac{f - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}} = \frac{0{,}48 - 0{,}6}{\sqrt{\frac{0{,}6(0{,}4)}{100}}} \approx -2{,}45$;

f puisque $|t| > 1{,}96$ on refuse (H_0) au risque 5 %

– DÉCISION :

Au risque 5 % on affirme que l'échantillon de melons ne provient pas de l'exploitation de Gwenael.



BTS Bio-Industries 1995
Taux de sucre
Aide mémoire : test bilatéral
risque 10 % : |T| ≤ 1,645 ;
risque 5 % : |T| ≤ 1,96 ;
risque 1 % : |T| ≤ 2,56 ;
F suit $N\left(0{,}6, \sqrt{\frac{0{,}6\ (1-0{,}6)}{100}}\right)$
$\sigma(F) = \sqrt{\frac{0{,}6(1-0{,}6)}{100}} \approx 0{,}049$
95%
Intervalle d'acceptation
f = 0,48
0,50
0,70
0,4
0,45
0,5
0,55
0,6
0,65
0,7
0,75
0,8
0,85
rejette (H_0) au risque 2,5 %
On accepte (H_0) au seuil de confiance 95 %
On rejette (H_0) au risque 2,