BTS BIOTECHNOLOGIE 1998

Devoir n°8 ; BTS 2 BIO & AB ; Ellipses page 98
Année scolaire 2002/2003
Le 13 Février 2002

EXERCICE 2 (9 points)

Une entreprise fabrique des pièces métalliques. L'unité de mesure est le mm. On admet que le diamètre D d'une pièce suit la loi normale de moyenne m = 90 et d'écart-type σ = 0,16.

Tous les résultats sont donnés au centième le plus proche.

Partie A :

On appelle X la variable aléatoire qui à une pièce associe le diamètre en mm. On admet que X suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart-type 0,16.

¶ Calculer la probabilité pour que le diamètre d'une pièce prise au hasard ne soit pas dans l'intervalle I_1 = [89,7 ; 90,3] ;

• On effectue un grand nombre de mesures de diamètre. Déterminer le nombre positif e, à un dixième près, tel que 90 % des mesures appartiennent à l'intervalle I_2 = [90 - e ; 90 + e] ;

Partie B :

On tire N pièces d'un stock comprenant un très grand nombre de pièces. On refuse toutes les pièces dont le diamètre n'appartient pas à l'intervalle I_1 . La probabilité pour qu'une pièce soit rejetée est égale à 0,06 à chaque tirage.

On appelle alors Y la variable aléatoire qui, à cette épreuve, associe le nombre de pièces rejetées.

f On suppose N = 4

¶ Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ? On donnera ses paramètres.

• Calculer p(Y = 1) ;

‚ Calculer p(Y > 1) ;

f On suppose N = 50

On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de Y par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre ;

„ En utilisant cette approximation, calculer p(Y = 0) ;

¸ Calculer p(Y < 3) ;

On tire un échantillon de 100 pièces. On constate que le diamètre moyen est de 89,96 mm. ;

ˇ Au risque 5%, et en admettant que l'écart-type reste égal à 0,16, peut-on admettre que la moyenne des pièces de l'ensemble de la fabrication est bien 90 mm ?

<u>EXERCICE N°2 :</u>

Une entreprise fabrique des pièces métalliques. L'unité de mesure est le mm. On admet que le diamètre D d'une pièce suit la loi normale de moyenne m = 90 et d'écart-type s = 0,16.

Tous les résultats sont donnés au centième le plus proche.

PARTIE A :

On appelle X la variable aléatoire qui à une pièce associe le diamètre en mm. On admet que X suit la loi normale de moyenne 90 et d'écart-type 0,16.

¶ *Calculer la probabilité pour que le diamètre d'une pièce prise au hasard ne soit pas dans l'intervalle I_1 = [89,7 ; 90,3] ;*

<u>Solution :</u>

+ ***6 pts*** f X la variable aléatoire qui, à toute pièce, associe son diamètre suit la loi normale N (90, 0,16)

Calcul de : p("le diamètre d'une pièce prise au hasard ne soit pas dans l'intervalle I_1 = [89,7 ; 90,3]") = a

a = 1-p(89,7 ≤ X ≤ 90,3) :

+ ***3 pts***

$89{,}7 \le X \le 90{,}3$ équivalent à $89{,}7-90 \le X-90 \le 90{,}3-90$

$89{,}7 \le X \le 90{,}3$ équivalent à $\frac{89{,}7-90}{0{,}16} \le \frac{X-90}{0{,}16} \le \frac{90{,}3-90}{0{,}16}$

$89{,}7 \le X \le 90{,}3$ équivalent à $\frac{-0{,}3}{0{,}16} \le \frac{X-90}{0{,}16} \le \frac{0{,}3}{0{,}16}$

X suit N(90,0,16) équivalent à $T=\frac{X-90}{0{,}16}$ suit N(0,1)

$89{,}7 \le X \le 90{,}3$ équivalent à $-1{,}875 \le T \le 1{,}875$

$89{,}7 \le X \le 90{,}3$ équivalent à $|T| \le 1{,}875$

+ ***1 pt***

+ a = 1 - p(89,7 ≤ X ≤ 90,3) = 1-p(-1,875 < T < 1,875) ; on applique les propriétés suivantes :

$p(-t_1 < T < t_2) = p(T < t_2) - p(T < -t_1) = \Pi(t_2) - p(T < -t_1)$ et $p(T < -t_1) = 1 - p(T < t_1) = 1 - \Pi(t_1)$

Donc $p(-t_1 < T < t_2) = \Pi(t_2) - (1 - \Pi(t_1)) = \Pi(t_2) + \Pi(t_1) - 1$.

En particulier : $p(-t_1 < T < t_1) = \Pi(t_1) - (1 - \Pi(t_1)) = \Pi(t_1) + \Pi(t_1) - 1 = 2\Pi(t_1) - 1$.

+ ***2 pts*** p(-1,875 < T < 1,875) = Π (1,875) + Π (1,875) -1 = 2 Π (1,875) -1 =

Par lecture dans la table : Π (1,87) = 0,9693 , Π (1,88) = 0,9699,

donc Π (1,875) = (0,9693 + 09699) / 2 = 0,9696 ; p(-1,875 < T < 1,875) = 2 Π (1,875) -1 = 2 0,9696 -1 = 0,9382.

a = 1 - p(89,7 ≤ X ≤ 90,3) = 1-p(-1,875 < T < 1,875) = 1 - 0,9382 = 0,061 8 ≈ **0,06**.

• *On effectue un grand nombre de mesures de diamètre. Déterminer le nombre positif e, à un dixième près, tel que 90 % des mesures appartiennent à l'intervalle I_2 = [90 - e ; 90 + e] ;*

+ ***4 pts*** f X la variable aléatoire qui, à toute pièce, associe son diamètre suit la loi normale N (90, 0,16).

Calcul de : p("le diamètre d'une pièce prise au hasard dans l'intervalle I_1 = [90 - e ; 90 + e]") = p(90 - e ≤ X ≤ 90 + e) :

$90-e \le X \le 90+e$ équivalent à $90-e-90 \le X-90 \le 90+e-90$

$90-e \le X \le 90+e$ équivalent à $\frac{90-e-90}{0{,}16} \le \frac{X-90}{0{,}16} \le \frac{90+e-90}{0{,}16}$

$90-e \le X \le 90+e$ équivalent à $\frac{-e}{0{,}16} \le \frac{X-90}{0{,}16} \le \frac{e}{0{,}16}$

X suit N(90,0,16) équivalent à $T=\frac{X-90}{0{,}16}$ suit N(0,1)

$90-e \le X \le 90+e$ équivalent à $\frac{-e}{0{,}16} \le T \le \frac{e}{0{,}16}$

$90-e \le X \le 90+e$ équivalent à $|T| \le \frac{e}{0{,}16}$

$90-e \le X \le 90+e$ équivalent à $|T| \le \frac{e}{0{,}16}$

$p(90-e \le X \le 90+e) = p(|X-90| \le e) = p\left(|T| \le \frac{e}{0{,}16}\right) = 0{,}90$

Calcul de t_σ tel que : $p(|T| \le t_\sigma) = 0{,}90 = 2\Pi(t_\sigma) - 1$;

Donc : $2\Pi(t_\sigma) = 1 + 0{,}90 = 1{,}90$; $\Pi(t_\sigma) = \frac{1{,}90}{2} = 0{,}95$

Sachant que : Π(1,64) ≈ 0,949 5 et que Π(1,65) ≈ 0,950 5

Donc : 0,95 ≈ Π(1,645) et $t_\sigma \approx 1{,}645$;

Calcul de e : $\frac{e}{0{,}16} \approx 1{,}645$ donc $e \approx 1{,}645 \times 0{,}16 \approx 0{,}26$

PARTIE B :

On tire N pièces d'un stock comprenant un très grand nombre de pièces. On refuse toutes les pièces dont le diamètre n'appartient pas à l'intervalle I_1 . La probabilité pour qu'une pièce soit rejetée est égale à 0,06 à chaque tirage.

On appelle alors Y la variable aléatoire qui, à cette épreuve, associe le nombre de pièces rejetées.

f <u>*On suppose N = 4 (n = 4) :*</u>

¶ *Quelle est la loi de probabilité suivie par Y ? On donnera ses paramètres.*

+ ***3 pts*** **<u>Solution :</u>** (à la lecture de la définition de Y on note que l'intérêt se porte sur le caractère : pièce défectueuse ;

+ L'expérience aléatoire qui consiste , après chaque tirage , à mesurer le diamètre de la pièce, conduit à deux issues contradictoires:

f D : la pièce est défectueuse avec la probabilité p = 0,06 ;

f D(barre) : la pièce n'est pas défectueuse avec la probabilité q = 1 - p = 0,94 ;

On peut considérer que la taille de l'échantillon est très petite par rapport à la taille de la population ;

+ Ainsi Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 4 (n=4) pièces, associe le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n , p) c'est à dire $\mathcal{B}$ (4 , 0,06). Les paramètres de $\mathcal{B}$ sont n=4 et p=0,03.

De plus E(Y) = np = 4 0,06 = 0,24 et V(X) = np(1-p) = 4 0,06 0,94 ≈ 0,225.

• *Calculer p(Y = 1) ;*

+ ***1 pt*** **<u>Solution :</u>**

Soit l'évènement « le lot de 4 pièces contient 1 pièce défectueuse » : (Y = 1) ;

p(Y = 1) = 4C1. $0,06^1$. $0,94^3$ ≈ 0,199 ≈ **0,20** ;

‚ *Calculer p(Y > 1) ;*

Soit l'évènement « le lot de 4 pièces contient au moins 2 pièces défectueuses » : (Y ≥ 2) ou (Y > 1) ;

+ **<u>Solution :</u>**

+ ***2 pts*** f p(Y > 1) = 1- (p(Y = 0) + p(Y = 1)) =

= 1 - (4C0. $0,06^0$. $0,94^4$ + 4C1. $0,06^1$. $0,94^3$) = 1 - 0,780 7- 0,199 3 = 1 - 0980 0 ≈ **0,02** ;

f *<u>On suppose N = 50 (n = 50) :</u>*

On admet que l'on peut approcher la loi de probabilité de Y par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre ;

„ *En utilisant cette approximation, calculer p(Y = 0) ;*

+ ***2 pts*** **<u>Solution :</u>**

+ Y la variable aléatoire qui, à chaque lot de 50 (n=50) pièces, associe le nombre de pièces défectueuses suit la loi binomiale $\mathcal{B}$ (n , p) c'est à dire $\mathcal{B}$ (50 , 0,06). Les paramètres de $\mathcal{B}$ sont n=50 et p=0,06.

De plus E(Y) = np = 50 0,06 = 3 .

Rappelons que les conditions d'approximation par une loi de Poisson sont : n≥30 ; p≤0,1 ; np<10 ;

+ Puisque : n = 50 (n ≥ 30) ; p = 0,06 (p < 0,1) et np = 3 (np<10) donc Y peut-être approchée par une Loi de Poisson de paramètre : λ = np=3.

p(Y = 0) = $e^{-3}. 3^0)/_{0!}$ ≈ 0,049 7 par approximation du calcul ou par lexture dans la table ≈ 0,05

‚ *Calculer p(Y < 3) ;*

+ ***2 pts*** **<u>Solution :</u>**

p(Y < 3) =$(e^{-3}. 3^0)/_{0!}$ + $(e^{-3}. 3^1)/_{1!}$ + $(e^{-3}. 3^2)/_{2!}$ = e^{-3} ($3^0/_{0!}$ + $3^1/_{1!}$ + $3^2/_{2!}$) ≈ 0,423 2 ≈ **0,42** (par le calcul)
ou par lecture dans la table : p(Y < 3) = 0,050 + 0,149 + 0,224 ≈ 0,423 ≈ **0,42** .

On tire un échantillon de 100 pièces. On constate que le diamètre moyen est de 89,96 mm. ;

ˇ *Au risque 5%, et en admettant que l'écart-type reste égal à 0,16, peut-on admettre que la moyenne des pièces de l'ensemble de la fabrication est bien 90 mm ?*

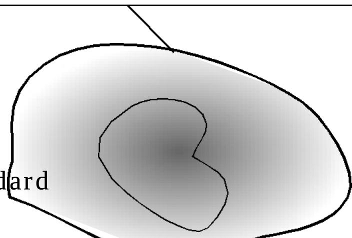
Population P de taille N
de moyenne μ inconnue et d'écart-type σ inconnue
admettant pour valeurs standard
μ_0 = 90 mm et σ_0 = 0,16 mm

<u>CONSTRUCTION DU TEST BILATERAL:</u>

+ ***2 pts*** ¶ **LOI D'ÉCHANTILLONNAGE** :

Soit $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de taille n= 100 pièces de la production, associe la moyenne des diamètres de ces 100 pièces,

suit la loi normale $N\left(\mu ; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ où μ et σ sont inconnus mais pour lesquels on connait une approximation $\hat{\mu}$ = μ_0 (valeur standard) = 90 , et $\hat{\sigma}$ = σ_0 = 0,16 (valeur standard



• **HYPOTHESE À TESTER** : (hypothèse nulle) la valeur standard μ_0 = 90mm

(H_0) hypothèse nulle : « $\mu = \mu_0$ » c'est à dire « le diamètre moyen est 90 mm »

Dès que vous formulez cette hypothèse vous devez , en même temps, imaginer l'hypothèse alternative qui doit être contradictoire ; c'est à dire prendre en compte sous la forme (H_0) : « la durée de vie moyenne est très peu différente de la valeur standard 90 mm *»*
Le terme " peu différente " implique un test bilatéral.

Echantillon de taille n =100
de moyenne m_e ≈ **89,96** mm
et d'écart-type σ ≈ **0,16 mm**

‚ **HYPOTHESE ALTERNATIVE - NATURE DU TEST** :

(H_1) : « $\mu \neq \mu_0$ » c'est à dire « le diamètre moyen est différent de 90 mm » ;
le test est bilatéral c'est à dire (H_1) : « $\mu < \mu_0$ ou $\mu > \mu_0$ »

+ ***2 pts*** „ **CONDITIONS DE REJET** (H_0) **AU RISQUE 5%** :

+ ***Remarque :*** *il s'agit de vérifier que* μ *ou – plutôt la valeur moyenne calculée sur un échantillon de 100 individus :* m_e *– appartient ou non à un intervalle d'acceptation centré en* μ_0 *, dont l'amplitude dépend du seuil de confiance. Le test d'hypothèse est construit à partir d'un outil bien connu : l'intervalle de confiance ; si* m_e *appartient à l'intervalle, alors (*H_0 *) est vérifiée. Pour réaliser ce calcul nous disposons d'un outil : c'est la loi normale qui, en fonction de ses caractéristiques* μ *et* σ *, permettra de calculer cette amplitude.*

f Sous l'hypothèse (H_0) :

f Considérons les deux méthodes :

Remarque : *à partir de là deux méthodes sont préconisées :*

Première méthode : *la condition de rejet sera formulée sur la fonction X (X barre) .*

Seconde méthode : *la condition de rejet sera formulée en utilisant la variable* $T = {}^{X}/_{\sigma(X)}$ *; X (X barre).*

$m = m_0$, dans ce cas $\bar{X}$ suit la loi normale $N\left(0, \sigma\left(\bar{X}\right)\right)$; $\sigma\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ admet pour approximation $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ et prend pour valeur $\frac{0}{\sqrt{\ }}$

Soit : $T = \dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$; T suit la loi normale N(0,1) ; $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ admet pour approximation $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$ et prend pour valeur $\frac{0,16}{\sqrt{100}}$

* **PREMIERE MÉTHODE :**

+ On recherche un intervalle centré en μ_0 : [μ_0 -d ; μ_0 + d] tel que l'on ait 95% de chances d'avoir μ proche de μ_0 , c'est à dire p(-d < X (X barre) - μ_0 < d) = 0,95 ;

Sous (H_0) : $\mu = \mu_0$, $\bar{X}$ suit la loi normale $N\left(\mu_0 , \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ équivalent à $T = \dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ suit la loi normale N(0,1) ; $\sigma\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \approx \frac{0,16}{\sqrt{100}}$

En fait nous avons toute latitude pour rechercher cet intervalle d'acceptation et de refus de (H_0) au risque 5% ;

Il est possible à partir d'un intervalle centré en $\mu_0 = 90$ de rechercher d le rayon de l'intervalle d'acceptation: $p\left(\left|\bar{X}-90\right|<d\right) = 0,9$

Il est possible de rechercher un intervalle [a ; b] centré en $\mu_0 = 90$: $p\left(a<\bar{X}<b\right) = 0,95$

Ainsi : $p\left(a<\bar{X}<b\right) = p\left(90-d<\bar{X}<90+d\right) = p\left(\left|\bar{X}-90\right|<d\right) = 0,95$ équivalent à $p\left(|T|<t_\alpha\right) = 0,95$; on sait que $t_\alpha = 1,96$

Ainsi : $|T|<1,96$ équivalent à $\left|\dfrac{\bar{X}-90}{\sigma\left(\bar{X}\right)}\right|<1,96$ équivalent à $\left|\bar{X}-90\right|<1,96\,\sigma\left(\bar{X}\right)$

Donc $d = 1,96 \times 0,016 = 0,031 \approx 0,03$

Ainsi : $p\left(90-0,03<\bar{X}<90+0,03\right) = p\left(89,97<\bar{X}<90,03\right) = 0,95$.

+ ***1 pt***

f Conditions de rejet de (H_0) :

Si | X (X barre) -90 | ≤ 0,03 ou si X (X barre) appartient à [89,97 ; 90,03] : on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si | X (X barre) -90 | ≥ 0,03 ou si X (X barre) n'appartient pas à [89,97 ; 90,03] : on refuse (H_0) au risque 5 % ;

* **SECONDE MÉTHODE :**

+ On recherche un intervalle centré en 0 : [-h ; h] tel que l'on ait 95% de chances d'avoir μ - μ_0 proche de 0 ;

La démonstration est la même puisque ma méthode est basée sur l'utilisation de la variable aléatoire T qui est pratiquement le seul outil capable de nous permettre le calcul d'un intervalle de confiance :

f En conclusion :

Si | T | ≤ 1,96 : on accepte (H_0) au risque 5 % ;

Si | T ≥ 1,96 : on refuse (H_0) au risque 5 % ;

+ ***2 pts*** ˇ **MISE EN OEUVRE DU TEST :**

* **PREMIERE MÉTHODE :**

f Calcul de $x = m_e - 25$ = 89,96 - 90 = -0,04 ; ou 89,96 n'appartient pas à [89,97 ; 90,03];

f puisque | x | ≥ 0,03 ou puisque 89,96 n'appartient pas à [89,97 ; 90,03], on refuse (H_0) au risque 5 % ;

* **SECONDE MÉTHODE :**

f $t = \dfrac{m_e-90}{\sigma\left(\bar{X}\right)} = \dfrac{89,96-90}{0,016} \approx -2,5$

f puisque | t | ≥ 1,96 , on refuse (H_0) au risque 5 % ;

… **DÉCISION :**

Au risque 5 % l'échantillon est n'est pas conforme à la valeur standard.

BTS BIOTECHNOLOGIE 1998

Devoir n°8 ; BTS 2 BIO & AB ; Ellipses page 98
Année scolaire 2002/2003
Le 13 Février 2002